纯粹数学与应用数学专著 第1号

数论在近似分析中的应用

华罗庚 王 元 著

科 学 出 版 社

纯粹数学与应用数学专著　第1号

数论在近似分析中的应用

华罗庚　王　元　著

科　学　出　版　社

1978

内 容 简 介

本书是作者对"数论在近似分析中的应用"这一新兴的应用数学分支，集国内外二十年的最新成果，从理论与使用两个方面进行的一个总结. 本书可供数论理论研究工作者及实际数值计算工作者参考.

纯粹数学与应用数学专著 第1号

数论在近似分析中的应用

华罗庚 王 元著

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年10月第一版 开本：850×1168 1/32
1978年10月第一次印刷 印张：8 插页：精2
印数：精：1—50,050 平：1—94,150 字数：208,000

统一书号：13031·808
本社书号：1156·13—1

定价：布面精装1.75元 平装1.00元

序

数论是最古老的数学分支之一．但是数论在近似分析问题上系统的应用研究，则还只有二十年历史．这显然是由于电子计算机的发展与应用的结果，从而使人们的思想与眼界比过去开阔了．例如，由于计算工具的落后，关于数值积分的研究，几个世纪以来，常常局限于单重积分的数值计算问题．直至五十年代，多重积分近似计算的研究，才如雨后春笋般的发展起来．数论方法也是研究多重积分近似计算的重要方法之一．

本书所介绍的数论方法是用来研究多变数的近似分析问题的．简而言之，首先用数论方法构造出高维立方体中的一致分布点集贯，然后将这一点集贯用于高维近似分析问题，即利用它将一个连续性的问题化为离散性的问题来处理．例如要计算一个高维立方体上的定积分，我们就用事先选定的一致分布点集上的被积函数值构成的单和来逼近多重积分．在被积函数适合一定的条件下，逼近的误差主阶是与维数无关的． 有时甚至是臻于至善的．值得一提的是可以证明用古典方法得到的高维数值积分公式，误差的主阶是与维数有关的．当维数稍大时，误差便很大而无法使用．所谓 Monte Carlo 方法得到的误差，虽然亦与维数无关，但却是概率意义的误差，而不是普通意义的误差．当然，也可以利用一致分布点集贯来构造逼近多变数周期函数的三角多项式；利用它来构造近似计算某类积分方程解的代数方程组等等．

数论中的不少重要原理与方法，例如同余式论，指数和的估计方法，丢番图逼近论与代数数论中的一些重要结果，都可以有效地用来构造高维一致分布点集贯．这些近似分析中的数论方法基本上都产生于五十年代末． 例如，借助于某种完整三角和的估计，Коробов, H. M.[1] (1957) 定义了高维空间所谓的方幂点集贯．借助于孙子定理，Halton, J. H.[1] (1960)推广了 Van der Corput, J.

G.[1] 点列，利用 r 进位小数定义了高维空间的一致分布点集贯. Коробов, H. M.[2] (1959) 与 Hlawka, E.[3] (1962) 独立地定义了所谓的完全佳格点点集贯. Бахвалов, H. C.[1] (1959)与 Haselgrove, C. B.[1](1961) 独立地定义了适合某些丢番图不等式的高维空间佳点贯. 关于利用实分圆域的独立单位组来构造高维空间一致分布点集贯的思想，是华罗庚与王元[1]于 1960 年发表的. 关于这一方法在近似分析问题上的应用及理论探讨见华罗庚与王元 [4, 5, 6, 7, 8]. 在 1974 年，华罗庚与王元[6,7]还提出了用 PV 数的极小多项式构造的递推公式来定义高维空间一致分布点集贯的方法. 经过二十年，无论在实际应用上，还是在理论上，这些方法都取得了很好的成果. 因此在理论上对这一新兴的近似分析分支进行一次总结，使数论理论研究工作者及实际数值计算工作者，皆能更易于了解这一分支的内容，也许会有一些方便之处. 这就促使我们来撰写这样一本小册子.

本书所需的数论知识，除华罗庚《数论导引》的若干章节外，还需几条更深的数论定理，关于这些定理的证明，本书提供了参考资料，以供查阅. 除引 5.1 外，其余定理只与个别章节有关. 书末附有“格点点集表”，以供从事实际工作时查阅. 本书的参考资料，仅限于与书中所涉及的内容相关的部分. 其他有关重要资料，关于多重积分近似计算问题，请参看 Haber, S. [1] 与 Stroud, A. H. [1]. 关于一致分布理论及应用，请参看 Kuiper, L. 与 Niederreiter, H. [1].

在我们工作的近二十年中，曾先后得到过何祚庥、冯康、徐钟济、万庆萱、王光寅、徐峰与魏公毅等同志的热情支持与大力帮助，我们还不断收到读者来信，对我们的工作提出了很多宝贵意见. 我们谨在此致以最衷心的感谢.

最后，限于作者水平，书中缺点与错误一定不少. 我们衷心希望这本小册子问世后，能得到更多的批评指教.

华罗庚　王　元

1976 年 5 月 5 日完稿， 1977 年 11 月 29 日修改

目　　录

序 …… v

第一章　代数数与有理逼近 …… 1

§1.代数数域的单位 …… 1

§2.整底的有理逼近 …… 3

§3.实分圆域 …… 6

§4.实分圆域的单位 …… 8

§5.续 …… 12

§6.实 Dirichlet 域 …… 21

§7.三次域 …… 24

注释 …… 26

第二章　递推整数贯与有理逼近 …… 27

§1.初等对称函数的递推公式 …… 27

§2.S_n 的推广 …… 28

§3.PV 数 …… 32

§4.方程 $x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 之根 …… 34

§5.方程 $x^s - Lx^{s-1} - 1 = 0$ 之根 …… 36

§6.方程 $x^s - s^2r^{s-1}x^{s-1} + (-1)^{s-2}A_{s-2}r^{s-2}x^{s-2} + \cdots - A_1rx - 1 = 0$ 之根 …… 39

§7.多项式之既约性 …… 42

§8.η, τ, ω 的有理逼近 …… 43

注释 …… 47

第三章　一致分布 …… 48

§1.一致分布 …… 48

§2.间断函数的光滑逼近法 …… 49

§3.指数和与偏差估计 …… 51

§4.同余式的解数估计 …… 54

§5.同余式的解与偏差估计 …… 57

§6.分部求和公式 …… 58
§7.偏差比较 …… 59
§8.有理逼近与同余式的解 …… 60
§9.有理逼近与偏差估计 …… 62
§10.偏差的下界估计 …… 65
注释 …… 68
第四章 各种点集的偏差估计 …… 70
§1.平均格网点集 …… 70
§2.构造最佳分布点集贯 …… 71
§3.方幂点集 …… 79
§4.佳点集 …… 83
§5.佳点集的构造定理 …… 85
§6.$\mathscr{R}_s$ 点集 …… 86
§7.η 点集 …… 88
§8.二维情况 …… 90
§9.完全佳格点集 …… 93
注释 …… 98
第五章 一致分布与数值积分 …… 100
§1.囿变函数类 …… 100
§2.一致分布与数值积分 …… 103
§3.数值积分误差的下界估计 …… 109
§4.数值积分公式 …… 111
注释 …… 114
第六章 周期函数与函数的周期化 …… 115
§1.周期函数 …… 115
§2.若干引理 …… 117
§3.$H_s^\alpha(C)$，$Q_s^\alpha(C)$ 与 $E_s^\alpha(C)$ 的关系 …… 121
§4.简单周期化方法 …… 124
§5.完全周期化方法 …… 126
注释 …… 133
第七章 周期函数的数值积分 …… 134
§1.平均格网点集与数值积分 …… 134

§2.方幂点集与数值积分……135
§3.佳点集与数值积分……140
§4.数值积分误差的下界估计……145
§5.同余式的解与数值积分……146
§6.完全佳格点集与数值积分……150
§7.再论数值积分误差的下界估计……154
§8.佳点求积公式的平均误差……156
§9.完全佳格点求积公式的平均误差……158
注释……160

第八章 数值积分的数值误差……162

§1.数值误差表示法……162
§2.佳点集计算比较……165
§3.η点集的算法……166
§4.$\mathscr{R}_s$点集的计算……168
§5.其他$\mathscr{F}_s$点集示例……171
§6.完全佳格点集的计算……172
§7.几点注记……179
§8.格点点集表……181
§9.应用示例……183
注释……186

第九章 插值与逼近……187

§1.导引……187
§2.平均格网点集与插值公式……188
§3.若干引理……192
§4.$E_s^\alpha(C)$的函数的插值公式……195
§5.$Q_s^\alpha(C)$的函数的插值公式……197
§6.Bernoulli 多项式与插值法……201
§7.插值公式的下界估计……205
注释……207

第十章 积分方程与微分方程的近似解法……209

§1.若干引理……209
§2.第二类 Fredholm 型积分方程的渐近解法……212

§3.第二类 Volterra 型积分方程的渐近解法 …………………………… 217
§4.Fredholm 方程的特征值与特征函数问题…………………………… 219
§5.抛物型方程的 Cauchy 问题 ………………………………………… 222
§6.椭圆型方程的 Dirichlet 问题………………………………………… 224
§7.几点注记……………………………………………………………… 227
注释 …………………………………………………………………… 228
附录 格点点集表…………………………………………………………229
参考文献 ………………………………………………………………242

第一章　代数数与有理逼近

§1. 代数数域的单位

命 α 是一个 s 次代数数，则代数数域 $\mathscr{F}_s = R(\alpha)$ 是 α 的有理系数多项式所演出的域.

对于 $\mathscr{F}_s$ 中的一个数 $\xi(=\xi^{(1)})$，命 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(s)}$ 表示其全体共轭数. 假定 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 是 $\mathscr{F}_s$ 的整底. 作方阵

$$\Omega = (\omega_j^{(i)}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s,$$

则方阵

$$S = \Omega'\Omega = \left(\sum_{k=1}^{s} \omega_i^{(k)} \omega_j^{(k)}\right), \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant s$$

称为 $\mathscr{F}_s$ 的基方阵. 显然基方阵是有有理整元素的方阵. 在模群作用下，基方阵的不变性是表示代数数域的一个特征. S 的行列式 $\Delta = \det S$ 称为域的基数.

假定 $s = r_1 + 2r_2$. 在 α 的共轭数中，$\alpha, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(r_1)}$ 是实的，$\alpha^{(r_1+1)}, \cdots, \alpha^{(r_1+r_2)}$ 是复的，而且 $\alpha^{(r_1+r_2+1)} = \overline{\alpha^{(r_1+1)}}, \cdots, \alpha^{(r_1+2r_2)} = \overline{\alpha^{(r_1+r_2)}}$. 因此对于任何 $\xi \in \mathscr{F}_s$，常有

$$\xi^{(r_1+r_2+i)} = \overline{\xi^{(r_1+i)}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r_2.$$

换言之，对于任何 ξ，在 ξ 的共轭数中，最多有 $r_1 + r_2$ 个不同的绝对值

$$|\xi^{(1)}|, \cdots, |\xi^{(r_1)}|, |\xi^{(r_1+1)}|, \cdots, |\xi^{(r_1+r_2)}|.$$

记 $r = r_1 + r_2$. 命

$$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$$

为 $\mathscr{F}_s$ 的一组单位. 若

$$\det(\log|\varepsilon_j^{(i)}|) \neq 0, \ 2 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

则称 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一个独立单位组.

由熟知的 Dirichlet 定理可知 $\mathscr{F}_s$ 中必存在一个独立单位组(见 Fricke, R. [1]).

今后用 $c(f, g, \cdots)$ 表示仅与 $f, g, \cdots$ 有关之正常数,但不一定代表同一数值,不再声明.

本节将证明

定理 1. 命 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 为任意一组满足

$$\sum_{j=1}^{r_1} \gamma_j + \sum_{j=r_1+1}^{r} 2\gamma_j = 0 \tag{1}$$

之实数,则存在单位 $\eta \in \mathscr{F}_s$ 适合于

$$c^{-1}e^{\gamma_i} \leqslant |\eta^{(i)}| \leqslant ce^{\gamma_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{2}$$

此处 $c = c(\mathscr{F}_s)$.

证. 命 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1}$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一个独立单位组,且命

$$\xi^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)a_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{(i)a_{r-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

及 $c = e^a$, 此处

$$a = 2^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\sum_{j=1}^{r-1} |\log |\varepsilon_j^{(i)}|| \right), \tag{3}$$

则得

$$\prod_{i=1}^{r_1} |\xi^{(i)}| \prod_{j=1}^{r_2} |\xi^{(r_1+j)}|^2 = \prod_{k=1}^{r-1} \left(\prod_{i=1}^{r_1} |\varepsilon_k^{(i)}| \prod_{j=1}^{r_2} |\varepsilon_k^{(r_1+j)}|^2 \right)^{a_k} = 1. \tag{4}$$

解线性方程组

$$a_1 \log |\varepsilon_1^{(i)}| + \cdots + a_{r-1} \log |\varepsilon_{r-1}^{(i)}| = \gamma_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{5}$$

方程组(5)中共有 $r-1$ 个变数 $a_1, \cdots, a_{r-1}$, r 个方程. 由于

$$\det(\log |\varepsilon_j^{(i)}|) \neq 0, \quad 2 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant r-1,$$

所以除 $i = 1$ 所对应的方程外有唯一的解. 由(1),(4)可知这一解适合于 $i = 1$ 所对应的方程.

命 b_k 是最接近于 a_k 的整数,则

$$|b_k - a_k| \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant r-1.$$

定义单位

$$\eta(=\eta^{(1)})=\varepsilon_1^{b_1}\cdots\varepsilon_{r-1}^{b_{r-1}}.$$

今往验证 η 适合条件(2). 由(3), (5)可知

$$\begin{aligned}\big|\log|\eta^{(i)}|-\log|\xi^{(i)}|\big|&=\big|\log|\eta^{(i)}|-\gamma_i\big|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{r-1}|b_k-a_k|\,\big|\log|\varepsilon_k^{(i)}|\big|\leqslant a.\end{aligned}$$

故得(2)式. 定理证完.

特别对于实代数数域 $\mathscr{F}_s$, 取 $\gamma_1=\gamma$, $\gamma_2=\cdots=\gamma_r=\bar{\gamma}$, 则条件(2)变为

$$\gamma+(s-1)\bar{\gamma}=0\quad\text{或}\quad\bar{\gamma}=-\frac{\gamma}{s-1}.$$

故由定理1推出

定理 2. 假定 α 为 s 次实代数数,则对于任意实数 γ,皆存在 $\eta\in\mathscr{F}_s$ 使

$$c^{-1}e^{\gamma}\leqslant|\eta|\leqslant ce^{\gamma}\tag{6}$$

与

$$c^{-1}e^{-\frac{\gamma}{s-1}}\leqslant|\eta^{(i)}|\leqslant ce^{-\frac{\gamma}{s-1}},\quad i=2,\cdots,s,\tag{7}$$

此处 $c=c(\mathscr{F}_s)$.

特别取 $\gamma=1,2,\cdots$ 时, 则由定理2可知实域中存在绝对值趋于无穷的单位贯,其共轭数都差不多大,所谓差不多大者是指相差一个只与域 $\mathscr{F}_s$ 有关的常数倍数.

附记.

在(6)中我们不妨假定 $\eta>0$, 否则可以取 $-\eta$ 代替 η.

§2. 整底的有理逼近

命 $\mathscr{F}_s$ 为实代数数域, 则由定理1.2(即§1, 定理2)可知 $\mathscr{F}_s$ 中有递增的单位贯 $\eta_l(l=1,2,\cdots)$ 适合于

$$\eta_l>l,\ |\eta_l^{(i)}|\leqslant c(\mathscr{F}_s)\eta_l^{-\frac{1}{s-1}},\quad 2\leqslant i\leqslant s.\tag{1}$$

命

$$n_l=\sum_{i=1}^{s}\eta_l^{(i)}\tag{2}$$

及

$$h_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{s} \eta_l^{(i)} \omega_j^{(i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{3}$$

则 n_l 与 $h_j^{(l)}(1 \leqslant j \leqslant s)$ 都是有理整数.

本节将证明

定理 1. 命 $\eta_l(l = 1, 2, \cdots)$ 为适合于(1)的单位贯，$(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 为由(2), (3)定义的有理整数组贯，则有整底的有理逼近式

$$\left| \frac{h_j^{(l)}}{n_l} - \omega_j \right| \leqslant c(\mathscr{F}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{4}$$

证. 为简单计，略去指标 l. 由(1), (2), (3)可知

$$n = \eta + O(\eta^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta + O(n^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))$$

与

$$h_j = \eta\omega_j + O(\eta^{-\frac{1}{s-1}}) = \eta\omega_j(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}})).$$

所以

$$\frac{h_j}{n} = \omega_j(1 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))(2 + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}))^{-1}$$

$$= \omega_j + O(n^{-1-\frac{1}{s-1}}), \quad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

其中与"O"有关的常数仅依赖于 $\mathscr{F}_s$. 定理证完.

今往求出 n 与 $h_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 的表达式. 将 η 表为

$$\eta = \sum_{j=1}^{s} k_j \omega_j, \tag{5}$$

此处 $k_j(1 \leqslant j \leqslant s)$ 为有理整数. 由(5)及其共轭式子得

$$(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)}) = (k_1, \cdots, k_s)\Omega', \tag{6}$$

因而

$$(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(s)})\Omega = (k_1, \cdots, k_s)S = (h_1, \cdots, h_s). \tag{7}$$

又命

$$\sum_{j=1}^{s} a_j \omega_j = 1, \tag{8}$$

则

$$n=\sum_{i=1}^{s}\eta^{(i)}\sum_{j=1}^{s}a_j\omega_j^{(i)}=\sum_{j=1}^{s}a_j\sum_{i=1}^{s}\eta^{(i)}\omega_j^{(i)}=\sum_{j=1}^{s}a_jh_j. \qquad (9)$$

因此由(5),(7),(8),(9)即可得对应于η的有理整数组(n, h_1, $\cdots$, h_s).

附记.

1. 在以上讨论中,并不需要假定$\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$为整底,只要$\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$为$\mathscr{F}_s$的一组基底,而单位$\eta$又可以表为$\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$的有有理整系数的线性表达式即可.

2. 算出有理整数组(n, h_1, $\cdots$, h_s),仅需$c(\mathscr{F}_s)\log n$次初等运算.

3. 由 Schmidt, W. M. 定理(见 Schmidt, W. M.[1,2])可知(4)之右端已不允许作本质改进,即$n^{-1-\frac{1}{s-1}}$不能换为$n^{-1-\frac{1}{s-1}-\varepsilon}$,此处及以后$\varepsilon$皆表示任意给定正数,所以由这里给出的整底$\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$的有理逼近有最佳的误差阶. 但是我们在这里并没有考虑(4)的右端的常数因子$c(\mathscr{F}_s)$的最佳问题. 显然由证明过程可见$c(\mathscr{F}_s)$与独立单位组的选取有关. 除此而外,还与整底$\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$的选取有关. 命

$$\lceil\omega\rceil=\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant s}|\omega_j^{(i)}|,$$

则(4)之右端与整底的关系应为$O(\lceil\omega\rceil n^{-1-\frac{1}{s-1}})$.

我们猜想在基数最小的实代数数域中,可以选取适当的单位与整底使逼近有最好的常数.

4. 关于寻求适合于(4)的整数贯(n_l, $h_1^{(l)}$, $\cdots$, $h_s^{(l)}$)($l=1$, 2, $\cdots$)的问题,当$s=2$时,即用熟知的连分数展开方法(见华罗庚[1]第十章);当$s>2$时,经典方法则一般只能证明存在无限多个整数组(n_l, $h_1^{(l)}$, $\cdots$, $h_s^{(l)}$)使(4)成立(见华罗庚[1]第二十章),却不能给出具体定出(n_l, $h_1^{(l)}$, $\cdots$, $h_s^{(l)}$)的可行算法. 在此介绍的方法说明,只要知道实代数数域的一个独立单位组,即可以得到域的整底的最佳有理逼近式. 我们将在以下几节给出实代数数

域整底有理逼近的具体例子.

§3. 实分圆域

命 p 为一个素数 $\geqslant 5$ 及 $s=\frac{1}{2}(p-1)$. 习知方程

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0 \tag{1}$$

是有理数域 R 上的既约方程(见华罗庚[1]第一章). 它的根为 $e^{\frac{2\pi i l}{p}}(1\leqslant l\leqslant p-1)$. 作代换

$$x+x^{-1}=y \quad 或 \quad x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}, \tag{2}$$

则得

$$1+\sum_{\nu=1}^{s}\left(\left(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\right)^{\nu}+\left(\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\right)^{\nu}\right)=0. \tag{3}$$

由方程(1)的既约显然导出方程(3)亦是既约的. 方程(3)的根为

$$2\cos\frac{2\pi l}{p}, \quad 1\leqslant l\leqslant s. \tag{4}$$

所以域 $\mathscr{R}_s=R\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$为 s 次完实代数数域(当 α 及其共轭数都是实代数数时,我们称 $R(\alpha)$ 为完实代数数域). (4) 为它的一组基底. 我们称 $\mathscr{R}_s$ 为 s 次实分圆域.

易知

$$\sum_{l=1}^{s}2\cos\frac{2\pi l}{p}=-1, \tag{5}$$

又由(3)可知

$$(-1)^s\prod_{l=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi l}{p}\right)=1+\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{(-4)^{\mu}}{2^{2\mu-1}}$$

$$=1+2\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]}(-1)^{\mu}=(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]},$$

所以

$$\prod_{l=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi l}{p}\right)=(-1)^{\left[\frac{1}{2}(s+1)\right]}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \tag{6}$$

因此 $2\cos\frac{2\pi l}{p}$ $(1\leqslant l\leqslant s)$ 都是域 $\mathscr{R}_s$ 的单位.

命 g 表示 mod p 的一个原根. 由于

$$2\cos\frac{2\pi}{p}g^{l\pm s}=2\cos\left(-\frac{2\pi}{p}g^l\right)=2\cos\frac{2\pi}{p}g^l, \tag{7}$$

所以(4)可以写为

$$\omega_l=2\cos\frac{2\pi}{p}g^l,\quad 1\leqslant l\leqslant s. \tag{8}$$

又由(7)可以扩大足码范围,定义 $\omega_{l\pm s}=\omega_l$.

变换

$$\sigma:\ \omega_l\to\omega_{l+1},\quad 1\leqslant l\leqslant s, \tag{9}$$

是实分圆域的一个自同构. 一共有 s 个自同构

$$\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{s-1},\sigma^s(=\sigma^0=1). \tag{10}$$

它们组成自同构群. $\mathscr{R}_s$ 中的一个数 $\xi(=\xi^{(1)})$, 经这 s 个自同构变换,得到它的 s 个共轭数 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(s)}$.

作方阵

$$\Omega=(\omega_{i+j}),\quad 1\leqslant i,j\leqslant s. \tag{11}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{s}4\cos\frac{2\pi lk}{p}\cos\frac{2\pi mk}{p}=\sum_{k=1}^{s}\left(2\cos\frac{2\pi(l+m)k}{p}\right.$$
$$\left.+2\cos\frac{2\pi(l-m)k}{p}\right)=\begin{cases}p-2, & \text{当 } l=m,\\ -2, & \text{当 } l\neq m,\end{cases}$$

所以

$$S=\Omega'\Omega=pI-2M, \tag{12}$$

这儿 I 为单位方阵及 $M=(m_{ij})$, 其中 $m_{ij}=1$.

取 $\mathscr{R}_s$ 的一个独立单位组 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1}$, 且诸 $\varepsilon_l(1\leqslant l\leqslant s-1)$ 都可以表为 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 的有理整系数的线性表达式(我们将在下节讨论 $\mathscr{R}_s$ 的单位), 则由定理 1.2 的方法构造单位贯

$$\eta_l = \varepsilon_1^{a_1^{(l)}} \cdots \varepsilon_{s-1}^{a_{s-1}^{(l)}}, \quad l = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

满足

$$\eta_l > l, \quad |\eta_l^{(i)}| \leqslant c\eta_l^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{14}$$

此处 $c = c(\mathscr{R}_s) > 0$.

若

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{s} k_i^{(l)} \omega_i, \tag{15}$$

则由

$$(h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)}) = (k_1^{(l)}, \cdots, k_s^{(l)})(pI - 2M)$$

得出

$$h_i^{(l)} = pk_i^{(l)} - 2\sum_{j=1}^{s} k_j^{(l)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{16}$$

又由(5)得

$$n_l = -\sum_{j=1}^{s} k_j^{(l)} = -\sum_{j=1}^{s} h_j^{(l)}. \tag{17}$$

定理 1. 命$(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$$(l = 1, 2, \cdots)$为由满足(14)的单位贯 $\eta_l(l = 1, 2, \cdots)$ 及(15), (16), (17)定义的整数组贯,则得有理逼近式

$$\left|\frac{h_j^{(l)}}{n_l} - \omega_j\right| < c(\mathscr{R}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{18}$$

记 $c_1^{(l)} = 1$, $c_j^{(l)} = h_j^{(l)}$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$. 由于 $\mathscr{R}_2 = R\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = R(\sqrt{5})$, 所以将整数组贯 $(n_l, c_1^{(l)}, \cdots, c_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$看作是普通 Fibonacci 贯的推广,这种推广保有最佳有理逼近式(18).

§4. 实分圆域的单位

命 g 为 $\bmod p$ 的原根,则习知

$$\rho_l = \frac{\sin\frac{\pi}{p} g^{l+1}}{\sin\frac{\pi}{p} g^l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant s - 1 \tag{1}$$

为实分圆域 $\mathscr{R}_s$ 的一个独立单位组（见 §5）．与 ω_l 一样可以扩大 ρ_l 的足码范围，易知

$$\rho_l = \rho_{l+s}, \quad \rho_{l+1}\cdots\rho_{l+s} = \pm 1. \tag{2}$$

现在把 $\rho_l(1 \leqslant l \leqslant s)$ 表成基底

$$\omega_l = 2\cos\frac{2\pi}{p}g^l, \quad 1 \leqslant l \leqslant s \tag{3}$$

的线性表达式．由(1)可知

$$\begin{aligned}\rho_l &= ((e^{\frac{\pi i g^l}{p}})^g - (e^{-\frac{\pi i g^l}{p}})^g)(e^{\frac{\pi i g^l}{p}} - e^{-\frac{\pi i g^l}{p}})^{-1}\\ &= \sum_{m=0}^{g-1}(e^{\frac{\pi i g^l}{p}})^{g-1-m}(e^{-\frac{\pi i g^l}{p}})^m\\ &= \sum_{m=0}^{g-1} e^{\frac{\pi i g^l(g-1-2m)}{p}} = \sum_{m=0}^{g-1}\cos\frac{\pi g^l(g-1-2m)}{p}. \end{aligned}\tag{4}$$

1）假定 $2|g$，则

$$\rho_l = \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}g-1} 2\cos\frac{\pi g^l(g-1-2m)}{p}. \tag{5}$$

命

$$g-1-2m \equiv 2g^{e_m}(\bmod p), \quad m = 0, 1, \cdots, \frac{1}{2}g-1,$$

则得

$$\rho_l = \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}g-1}\omega_{l+e_m}.$$

由于 $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(\bmod p)$，而 $\cos x$ 是偶函数，因此当 $l+e_m > s\left(=\frac{p-1}{2}\right)$ 时，则取 $l+e_m$ 为 $l+e_m-ks$，此处 $ks < l+e_m \leqslant (k+1)s$．用矩阵符号写出

$$(\rho_1, \cdots, \rho_s) = (\omega_1, \cdots, \omega_s)M, \tag{6}$$

此处M是一个 s 行列的循迴行列式 (circulants)，且其元素非 0 即 1，其第一列元素是 $a_1, \cdots, a_s$，当其足码是 $1+e_m$ 或 $1+e_m-s$，则取 $a_t = 1$，否则取 $a_t = 0$．第二列是由第一列巡迴而得

来的，依次类推即

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & a_s & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_s & a_{s-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

2）假定 $2\nmid g$，则

$$\rho_l = 1 + \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(g-3)} 2\cos\frac{\pi g^l(g-1-2m)}{p}. \tag{7}$$

命

$$\frac{g-1}{2} - m \equiv g^{c_m} (\mathrm{mod}\ p), \quad m = 0, 1, \cdots, \frac{1}{2}(g-3),$$

即得

$$\rho_l = 1 + \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(g-3)} \omega_{l+c_m}.$$

由于

$$-1 = \sum_{l=1}^{s} \omega_l,$$

所以代入上式仍得

$$(\rho_1, \cdots, \rho_s) = (\omega_1, \cdots, \omega_s) M, \tag{8}$$

这儿M是一个元素由 0，－1 构成的巡迴方阵.

用上述方法很容易把单位 $\eta = \rho_1^{l_1} \cdots \rho_{s-1}^{l_{s-1}}$ 表示为 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 的有理整系数线性表达式．但是何时 $\omega_1, \cdots, \omega_{s-1}$ 就是 $\mathscr{R}_s$ 的一个独立单位组呢？关于这个问题，我们有下列引理.

引理 1. $\omega_1, \cdots, \omega_{s-1}$ 为 $\mathscr{R}_s$ 的一个独立单位组的充分且必要条件是

1）2 是 mod p 的原根

或

2）2 的次数是 $s\left(=\frac{1}{2}(p-1)\right)$，而且 $p \equiv 7 \pmod 8$.

证. 若 2 是 mod p 的原根,则取 $g=2$. 由(5)可知

$$\rho_l = 2\cos\frac{\pi 2^l}{p} = \omega_{l-1}, \quad 1 < l \leqslant s,$$

及当 $l=1$ 时,

$$\rho_1 = 2\cos\frac{2\pi}{p} = 2\cos 2^{s+1}\frac{\pi}{p} = \omega_s.$$

现在考虑 2 非 mod p 的原根的情况. 命

$$2 \equiv g^l \pmod{p},$$

则

$$\omega_\mu = 2\cos\frac{2\pi}{p}g^\mu = \pm 2\cos\frac{\pi}{p}g^{\mu+l} = \frac{\sin\frac{\pi}{p}g^{\mu+2l}}{\sin\frac{\pi}{p}g^{\mu+l}}$$

$$= \rho_{l+\mu}\rho_{l+\mu+1}\cdots\rho_{2l+\mu-1}.$$

由于 2 非原根,所以

$$(l,\ p-1) > 1.$$

由于

$$\omega_1\omega_{1+l}\cdots\omega_{1+(t-1)l}$$
$$= (\rho_{l+1}\cdots\rho_{2l})(\rho_{2l+1}\cdots\rho_{3l})\cdots(\rho_{lt+1}\cdots\rho_{(l+1)t}),$$

左边有 t 个 ω, 右边有 lt 个 ρ, 而且它们的足码是相联的整数, 取 $t=\frac{(p-1)}{(l,p-1)}$. 如果 $(l,\ p-1)>2$,则 $t<\frac{p-1}{2}$. 上式右边 ρ 的个数 $\frac{l(p-1)}{(l,p-1)}$ 是 $p-1$ 的倍数,因此等于1. 而左边 ω 的个数小于 $s-1$, 所以 $\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{s-1}$ 是非独立的.

今往研究 $(l,\ p-1)=2$ 的情况. 显然可见 2 的次数是 $s=\frac{1}{2}(p-1)$, 而且 2 是二次剩余 mod p, 即

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1.$$

即得 $p\equiv\pm1\pmod 8$（见华罗庚 [1] 第三章）.

1）假定 $p\equiv1\pmod 8$，则 $l=2m$，$2\nmid m$，$(m, p-1)=1$，从而 g^m 也是 $\bmod p$ 的原根，因此不妨假定

$$2\equiv g^2\pmod p. \tag{9}$$

所以有

$$\omega_1\omega_3\cdots\omega_{2\cdot\frac{p-1}{4}-1}=\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\cdots\rho_1\rho_2=\pm1,$$

即 $\frac{p-1}{4}$ 个 ω 之间是互依的，因此 $\omega_1, \cdots, \omega_{s-1}$ 是非独立的.

2）假定 $p\equiv7\pmod 8$. 由于 $2\|(p-1)$，所以可以假定 $2\|l$，不然则 $2\|(l+p-1)$. 因此我们仍然可以假定(9)式成立. 如果有 $l_1, \cdots, l_s$ 使

$$\omega_1^{l_1}\omega_2^{l_2}\cdots\omega_s^{l_s}=\pm1,$$

则

$$\begin{aligned}\pm1&=(\rho_3\rho_4)^{l_1}(\rho_5\rho_6)^{l_2}\cdots(\rho_2\rho_3)^{l_s}\\&=\rho_1^{l_{s-2}+l_{s-1}}\rho_2^{l_{s-1}+l_s}\rho_3^{l_s+l_1}\cdots\rho_s^{l_{s-3}+l_{s-2}}.\end{aligned}$$

由于 $\rho_1, \cdots, \rho_{s-1}$ 的独立性及 $\rho_1\cdots\rho_s=\pm1$ 可知

$$l_{s-2}+l_{s-1}=l_{s-1}+l_s=l_s+l_1=\cdots=l_{s-3}+l_{s-2}.$$

由于 $2\nmid s$，所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_s.$$

如果 $l_s=0$，则 $l_1=\cdots=l_{s-1}=0$，即 $\omega_1, \cdots, \omega_{s-1}$ 是独立单位组，引理证完.

§5. 续

命 p 表示素数，$p_1, p_2, \cdots$ 表示互不相同的素数. 命 m 为整数 $\geqslant5$. 记 $s=\frac{\varphi(m)}{2}$. 则 s 次分圆域 $\mathscr{R}_s=R\left(\cos\frac{2\pi}{m}\right)$ 有 $s-1$ 个独立单位.

以 Z_m^* 表示 $\bmod m$ 的缩剩余系构成的乘法群. 将 h 与 $-h$ 等同起来就得到 Z_m^* 关于 $\{\pm1\}$ 的商群

$$\frac{Z_m^*}{\{\pm1\}}=\{h_1, \cdots, h_s\}.$$

扩大足码范围，定义 $h_{s+j}=h_j$. 命

$$\varepsilon(h)=\prod_{\substack{n|m,n>1\\ p^l||n\Rightarrow p^l||m}} 2\sin\frac{\pi h}{n},\quad (h,m)=1 \tag{1}$$

及

$$\eta_j=\frac{\varepsilon(h_{j+1})}{\varepsilon(h_j)},\quad 1\leqslant j\leqslant s-1. \tag{2}$$

由于

$$\prod_{j=1}^{s}\eta_j=1, \tag{3}$$

所以诸 η_j 都是 $\mathscr{R}_s$ 的单位. 今往证明

定理 1. $\eta_1,\cdots,\eta_{s-1}$ 是 $\mathscr{R}_s$ 的独立单位组.

特别由此推出

定理 2. 当 $m=p^l$ 时，

$$\rho_j=\frac{\sin\frac{\pi}{p^l}g^{j+1}}{\sin\frac{\pi}{p^l}g^j},\quad 1\leqslant j\leqslant s-1 \tag{4}$$

为 $\mathscr{R}_s$ 的独立单位组，此处 g 为 mod p^l 的原根.

$\dfrac{Z_m^*}{\{\pm 1\}}$ 的 s 个特征是由 Z_m^* 的 s 个适合于 $\chi(-1)=1$ 的特征所诱导出来的. 记之为

$$\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}, \tag{5}$$

其中 χ_s 为主特征，则得

引理 1. 有下列正交关系

$$\sum_{j=1}^{s}\chi(h_j)=\begin{cases}s, & \text{当 } \chi=\chi_s;\\ 0, & \text{其它情形.}\end{cases} \tag{6}$$

证. 习知

$$\sum_{(h,m)=1}\chi(h)=\begin{cases}2s, & \text{当 } \chi=\chi_s;\\ 0, & \text{其它情形.}\end{cases}$$

(见华罗庚[1]，第七章)，所以

$$\sum_{j=1}^{s} \chi(h_j) = \frac{1}{2} \sum_{(h,m)=1} \chi(h) = \begin{cases} s, & 当\ \chi = \chi_s, \\ 0, & 其它情形. \end{cases}$$

引理证完.

命

$$\eta_j^{(i)} = \frac{\varepsilon(h_i h_{j+1})}{\varepsilon(h_i h_j)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{7}$$

则 $\eta_j^{(1)}, \cdots, \eta_j^{(s)}$ 就是 η_j 的全体共轭数. 又命

$$C = (c_{ij}) = (\log |\eta_j^{(i)}|), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s-1. \tag{8}$$

则得

引理 2. 有如下关系式

$$\det C = \zeta \prod_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=1}^{s} \chi_j(h_i) \log |\varepsilon(h_i)| \right), \quad |\zeta| = 1. \tag{9}$$

证. 显然

$$\det C = \pm \det C^*, \tag{10}$$

此处 $C^* = (c_{ij}^*), 1 \leqslant i, j \leqslant s$, 其中

$$c_{ij}^* = \begin{cases} \log |\varepsilon(h_i h_j)|, & 当\ 1 \leqslant i \leqslant s-1, 1 \leqslant j \leqslant s, \\ 1, & 其它情形. \end{cases} \tag{11}$$

命

$$P = (\chi_j(h_i)), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s, \tag{12}$$

则由引理 1 与(10)得

$$\det C \cdot \det P = \pm \det C^* P$$

$$= \pm s \prod_{j=1}^{s-1} \left(\sum_{i=1}^{s} \chi_j(h_i) \log |\varepsilon(h_i)| \right) \log D. \tag{13}$$

此处

$$D = (\bar{\chi}_j(h_i)), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s-1. \tag{14}$$

由于

$$s \det D = \det D^* = \det \bar{P}, \tag{15}$$

此处

$$D^* = \begin{pmatrix} D & I^{(s-1,1)} \\ 0 & s \end{pmatrix} \tag{16}$$

及

$$|\det P| = |\det \bar{P}| = |\det \bar{P}'P|^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{s}{2}}, \tag{17}$$

故将(15),(17)代入(13)即得引理.

由定义，$\det C \neq 0$ 即表示 $\eta_1, \cdots, \eta_{s-1}$ 为 $\mathscr{R}_s$ 的独立单位组,又易知

$$2\sum_{i=1}^{s} \chi(h_i) \log|\varepsilon(h_i)| = \sum_{(a,m)=1} \chi(a) \log|\varepsilon(a)|. \tag{18}$$

故由引理 2 推出

引理 3. $\eta_1, \cdots, \eta_{s-1}$ 是 $\mathscr{R}_s$ 的独立单位组的充要条件为对于任何适合于 $\chi(-1)=1$ 的 mod m 的非主特征 χ 有

$$R_\chi = \sum_{(a,\, m)=1} \chi(a) \log|\varepsilon(a)| \neq 0. \tag{19}$$

引理 4. 有次之恒等式

$$\prod_{h=0}^{m-1} 2\sin\left(\frac{h\pi}{m} + \theta\right) = 2\sin m\theta. \tag{20}$$

证.

$$\prod_{h=0}^{m-1} 2\sin\left(\frac{h\pi}{m}+\theta\right) = (-i)^m \prod_{h=0}^{m-1}\left(e^{\left(\frac{h\pi}{m}+\theta\right)i} - e^{-\left(\frac{h\pi}{m}+\theta\right)i}\right)$$

$$= (-i)^m e^{\frac{\pi i}{m}\sum\limits_{h=0}^{m-1} h - m\theta i} \prod_{h=0}^{m-1}\left(e^{2\theta i} - e^{-\frac{2\pi h i}{m}}\right)$$

$$= (-i)^m e^{\frac{\pi i(m-1)}{2} - m\theta i}\left(e^{2m\theta i} - 1\right)$$

$$= -i\left(e^{m\theta i} - e^{-m\theta i}\right) = 2\sin m\theta.$$

引理证完.

引理 5. 假定 $0 < \theta < 1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\theta}}{n} = -\log(2\sin\pi\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\theta\right)i. \tag{21}$$

证. 当 $0 < r < 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{2\pi i n\theta}}{n} = -\log\left(1 - re^{2\pi i\theta}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi in\theta}}{n}$ 收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi in\theta}}{n}=-\log(1-e^{2\pi i\theta})$$
$$=-\log(e^{\pi i\theta}(e^{-\pi i\theta}-e^{\pi i\theta}))$$
$$=-\log((2\sin\pi\theta)e^{\left(\pi\theta-\frac{\pi}{2}\right)i})$$
$$=-\log(2\sin\pi\theta)+\left(\frac{\pi}{2}-\pi\theta\right)i.$$

引理证完.

引理 6. 命 χ 为 mod d 的原特征及 $\chi(-1)=1$，则

$$\sum_{(a,d)=1}\chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{d}\right|=-\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}),\tag{22}$$

此处

$$\tau(\chi)=\sum_{(r,d)=1}\chi(r)e^{\frac{2\pi ir}{d}},\quad L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}.\tag{23}$$

证. 命

$$S(n,\chi)=\sum_{(r,d)=1}\chi(r)e^{\frac{2\pi inr}{d}}.\tag{24}$$

则

$$\bar{\chi}(n)\tau(\chi)=S(n,\chi)$$

(见华罗庚[1]第七章). 从而由引理 5

$$\tau(\chi)L(1,\bar{\chi})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)\tau(\chi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{(r,d)=1}\chi(r)e^{\frac{2\pi inr}{d}}$$
$$=\sum_{(r,d)=1}\chi(r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi inr}{d}}}{n}=\sum_{(r,d)=1}\chi(r)\left(-\log\left|2\sin\frac{\pi r}{d}\right|\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi r}{d}\right)i\right)=-\sum_{(r,d)=1}\chi(r)\log\left|2\sin\frac{\pi r}{d}\right|$$
$$-\frac{\pi i}{d}\sum_{(r,d)=1}\chi(r)r.\tag{25}$$

由于 $\chi(-1)=1$，所以

$$\sum_{(r,d)=1} \chi(r)r = \sum_{(r,d)=1} \chi(d-r)(d-r) = -\sum_{(r,d)=1} \chi(r)r.$$

因此

$$\sum_{(r,d)=1} \chi(r)r = 0,$$

代入(25)即得引理.

引理 7. 命 $m = p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}$ 及 $d = p_1^{l'_1}\cdots p_r^{l'_r}$, 此处 $l_i \geqslant 1$ 及 $0 \leqslant l'_i \leqslant l_i\,(1 \leqslant i \leqslant r)$. 命 χ 为 $\bmod m$ 的特征, $\bmod d$ 的原特征且 $\chi(-1) = 1$, 则

$$\sum_{(a,m)=1} \chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{m}\right| = -F(m_1)\tau(\chi)L(1,\bar{\chi}), \quad (26)$$

此处

$$m_1 = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid d}} p, \quad F(m_1) = \prod_{p \mid m} (1 - \chi(p)). \quad (27)$$

证. 首先假定 $m = dd'$, 及 $l'_i > 0\,(1 \leqslant i \leqslant r)$, 则由引理 4 得

$$\begin{aligned} R_\chi &= \sum_{(a,m)=1} \chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{m}\right| \\ &= \sum_{a_1=0}^{d'-1} \sum_{(a_2,d)=1} \chi(a_1 d + a_2)\log\left|2\sin\frac{\pi(a_1 d + a_2)}{m}\right| \\ &= \sum_{(a_2,d)=1} \chi(a_2)\sum_{a_1=0}^{d'-1} \log\left|2\sin\left(\frac{\pi a_1}{d'} + \frac{\pi a_2}{m}\right)\right| \\ &= \sum_{(a_2,d)=1} \chi(a_2)\log\left|2\sin\frac{\pi a_2 d'}{m}\right| \\ &= \sum_{(a,d)=1} \chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{d}\right|. \end{aligned} \quad (28)$$

其次假定 $m = m_1 m_2$, $m_1 = p_1^{l_1}\cdots p_j^{l_j}$ 及 $m_2 = p_{j+1}^{l_{j+1}}\cdots p_r^{l_r}$, 其中 $1 \leqslant j < r$, 又假定 $d \mid m_2$, 则 χ 也是 $\bmod m_2$ 的特征, 所以

$$\begin{aligned} R_\chi &= \sum_{(a,m)=1} \chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{m}\right| \\ &= \sum_{(a_1,m_1)=1} \sum_{(a_2,m_2)=1} \chi(a_1 m_2 + a_2 m_1)\log\left|2\sin\frac{\pi(a_1 m_2 + a_2 m_1)}{m}\right| \end{aligned}$$

$$= \sum_{(a_2, m_2)=1} \chi(a_2 m_1) \sum_{a_1=1}^{m_1} \log \left| 2\sin\left(\frac{\pi a_1}{m_1} + \frac{\pi a_2}{m_2}\right)\right| \sum_{k|(a_1, m_1)} \mu(k)$$

$$= \sum_{(a_2, m_2)=1} \chi(a_2 m_1) \sum_{k|m_1} \mu(k) \sum_{l=1}^{\frac{m_1}{k}} \log \left| 2\sin\left(\frac{\pi l k}{m_1} + \frac{\pi a_2}{m_2}\right)\right|.$$

所以由引理 4 及(28)得

$$\begin{aligned} R_\chi &= \sum_{(a_2, m_2)=1} \chi(a_2 m_1) \sum_{k|m_1} \mu(k) \log \left| 2\sin \frac{\pi a_2 m_1}{k m_2}\right| \\ &= \sum_{k|m_1} \mu(k)\chi(k) \sum_{(a_2, m_2)=1} \bar{\chi}(k)\chi(a_2 m_1) \log \left| 2\sin \frac{\pi a_2 m_1}{k m_2}\right| \\ &= F(m_1) \sum_{(a, m_2)=1} \chi(a) \log \left| 2\sin \frac{\pi a}{m_2}\right| \\ &= F(m_1) \sum_{(a, d)=1} \chi(a) \log \left| 2\sin \frac{\pi a}{d}\right|. \end{aligned}$$

所以由引理 6 即得引理.

引理 8. 命 $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) = 1$, 又命 χ 为 mod m 的特征,则

$$\sum_{(a, m)=1} \chi(a) \log \left| 2\sin \frac{\pi a}{m_2}\right| = \begin{cases} \varphi(m_1) \displaystyle\sum_{(a, m_2)=1} \chi(a) \log \left| 2\sin \frac{\pi a}{m_2}\right|, & \text{当 } \chi \text{ 为 mod } m_2 \text{ 的特征}, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases} \tag{29}$$

证. 当 χ 非 mod m_2 的特征时,一定存在 t 使

$$(1 + t m_2, m) = 1, \quad \chi(1 + t m_2) \neq 1,$$

所以

$$\begin{aligned} &\chi(1 + t m_2) \sum_{(a_1, m_1)=1} \chi(a_2 m_1 + a_1 m_2) \\ &\quad = \sum_{(a_1, m_1)=1} \chi(a_2 m_1 + a_1 m_2(1 + t m_2)) \\ &\quad = \sum_{(a, m_1)=1} \chi(a_2 m_1 + a m_2). \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{(a_1, m_1)=1} \chi(a_2 m_1 + a_1 m_2) = 0. \tag{30}$$

当 χ 为 mod m_2 的特征，即得

$$\sum_{(a_1,m_1)=1} \chi(a_2m_1 + a_1m_2) = \varphi(m_1)\chi(a_2m_1). \tag{31}$$

易知

$$\begin{aligned}
&\sum_{(a,m)=1} \chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{m_2}\right| \\
&= \sum_{(a_1,m_1)=1}\sum_{(a_2,m_2)=1} \chi(a_2m_1 + a_1m_2)\log\left|2\sin\frac{\pi a_2m_1}{m_2}\right| \\
&= \sum_{(a_2,m_2)=1}\log\left|2\sin\frac{\pi a_2m_1}{m_2}\right|\sum_{(a_1,m_1)=1}\chi(a_2m_1 + a_1m_2). \qquad (32)
\end{aligned}$$

将(30)，(31)代入(32)即得引理。

定理 1 的证明。命 χ 为任一适合于 $\chi(-1) = 1$ 的特征，则 χ 为 mod d 的原特征，此处 $d|m$，$d \geqslant 3$。于是由引理 7，引理 8 可知

$$\begin{aligned}
R_\chi &= \sum_{(a,m)=1}\chi(a)\log|\varepsilon(a)| \\
&= \sum_{\substack{n|m,n>1\\ p^l\|n\Rightarrow p^l\|m}}\sum_{(a,m)=1}\chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{n}\right| \\
&= \sum_{\substack{n|m,n>1\\ p^l\|n\Rightarrow p^l\|m}}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\, n)}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\sum_{(a,n)=1}\chi(a)\log\left|2\sin\frac{\pi a}{n}\right| \\
&= -\tau(\chi)L(1,\bar\chi)\sum_{\substack{n|m,n>1\\ p^l\|n\Rightarrow p^l\|m\\ d|n}}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)F(n_1). \qquad (33)
\end{aligned}$$

此处 $n_1 = \prod\limits_{\substack{p^l\|n\\ p\nmid d}} p^l$.

命 $d' = \prod\limits_{\substack{p^l\|n\\ p|d}} p^l$，则 $n = d'n_1$，且 $(d', n_1) = 1$，所以

$$\sum_{\substack{n|m,n>1\\ p^l\|n\Rightarrow p^l\|m\\ d|n}}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)F(n_1) = \varphi\left(\frac{m}{d'}\right)\sum_{\substack{n_1|\frac{m}{d'}\\ p^l\|n_1\Rightarrow p^l\|\frac{m}{d'}}}\frac{F(n_1)}{\varphi(n_1)}$$

$$= \varphi\left(\frac{m}{d'}\right) \prod_{p^l \| \frac{m}{d'}} \left(1 + \frac{1 - \chi(p)}{\varphi(p^l)}\right) \neq 0. \tag{34}$$

由于 $\tau(\chi) \neq 0$ 及 $L(1, \bar{\chi}) \neq 0$,(证明见华罗庚[1],第七章,第九章)。所以由(33),(34)可知 $R_\chi \neq 0$。故由引理 3 即得定理 1。

用类似的方法可以证明

定理 3. 命 $m = p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$,此处 $s \geqslant 2$ 及 $l_i \geqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant s)$,则

$$2 \sin \frac{\pi h}{m},\ (h, m) = 1,\ 2 \leqslant h \leqslant \frac{m}{2} \tag{35}$$

是 $R\left(\cos \frac{2\pi}{m}\right)$的独立单位组的充要条件为对每一个 $i (1 \leqslant i \leqslant s)$,群 $Z^*_{\frac{m}{p_i^{l_i}}}$ 均由 -1 与 p_i 生成,记之为

$$Z^*_{\frac{m}{p_i^{l_i}}} = \langle -1, p_i \rangle,\ 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{36}$$

由定理 3 立即推出

定理 4. 假定 $m = p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$,此处 $s \geqslant 4$ 及 $l_i \geqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 或 $s \geqslant 3$,$p_1 = 2$,$l_1 \geqslant 3$ 及 $l_i \geqslant 1 (2 \leqslant i \leqslant s)$,则(35)不是 $R\left(\cos \frac{2\pi}{m}\right)$的独立单位组。

例如当 $m = 21$ 时,(35)是独立的,而当 $m = 55$ 时,(35)就不是独立的。

附记。

在 §3 中,我们只讨论了很特殊的分圆域 $\mathscr{R}_s\left(s = \frac{p-1}{2}\right)$,这是由于目前在近似分析问题中只用过这种域。因为型(2)的单位都是由型如(35)的单位生成的。如果对于整数 $m \geqslant 5$,(35)是独立的,则从(35)出发进行近似计算似应更好。

§6. 实 Dirichlet 域

命 $p_1,\cdots,p_t$ 为 t 个互不相同的素数，$s=2^t$. 易知域 $\mathscr{D}_s=R(\sqrt{p_1},\cdots,\sqrt{p_t})$ 为一个 s 次完实代数数域. 我们称 $\mathscr{D}_s$ 为实 Dirichlet 域.

取 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1}$ 为诸 pell 氏方程

$$x^2-p_{i_1}\cdots p_{i_k}y^2=\pm 4 \tag{1}$$

的最小正解 $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\,y}{2}$，此处 $k\geqslant 1$ 及 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant t$ 为 $1,2,\cdots,t$ 的任意 k 个选择. 用以下方法排列 $d_i=p_{i_1}\cdots p_{i_k}$. 不妨假定

$$\varepsilon_i=\begin{cases}\frac{x_i}{2}+\frac{\sqrt{d_i}\,y_i}{2}, & x_i\equiv y_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad 当 1\leqslant i\leqslant m,\\ x_i+\sqrt{d_i}\,y_i, & 当 m+1\leqslant i\leqslant s-1,\end{cases} \tag{2}$$

此处 x_i 与 y_i 都是整数，也就是 $d_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$，则排在前面，不然则排在后面. 诸 $\varepsilon_i(1\leqslant i\leqslant s-1)$ 都是域 $\mathscr{D}_s$ 的单位. 置

$$\omega_1=1,\ \omega_2=\varepsilon_1,\ \cdots,\ \omega_{m+1}=\varepsilon_m,\ \omega_{m+2}=\sqrt{d_{m+1}},\ \cdots,\ \omega_s=\sqrt{d_{s-1}}, \tag{3}$$

则 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ 组成 $\mathscr{D}_s$ 的一组基底.

命 $k\geqslant 1$ 及 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant t$ 为 $1,2,\cdots,t$ 的任意 k 个选择. 定义变换

$$\sigma_{i_1\cdots i_k}:\quad \sqrt{p_\nu}\to\begin{cases}-\sqrt{p_\nu}, & 当 \nu=i_j,1\leqslant j\leqslant k,\\ \sqrt{p_\nu}, & 其它情形.\end{cases} \tag{4}$$

这是实 Dirichlet 域的一个自同构，再加上恒等变换 $\sigma_0=1$，共得 s 个变换，它们组成自同构群. $\mathscr{D}_s$ 中的一数 $\xi(=\xi^{(1)})$，经过这 s 个自同构变换，变为它的 s 个共轭数 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(s)}$.

引理 1. 对于任何正整数 l，在 $\mathscr{D}_s$ 中皆存在单位 η_l 满足

$$\eta_l>\varepsilon_1^{(s-1)l} \tag{5}$$

及

$$|\eta_l^{(i)}| \leqslant c\eta_l^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{6}$$

此处 $c = c(\mathscr{D}_s)$.

证. 1）首先计算在变换 $\sigma_{i_1\cdots i_k}$ 之下，ε_ν 变为 $\pm\varepsilon_\nu^{-1}(1\leqslant\nu\leqslant s-1)$ 之个数 $\Sigma_{i_1\cdots i_k}$.

若 $\varepsilon_\nu = X_\nu + \sqrt{d_\nu}Y_\nu$，此处 X_ν，Y_ν 为有理数，则显然当 d_ν 能被奇数个 $p_{ij}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 整除时，$\sigma_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_\nu = \pm\varepsilon_\nu^{-1}$，否则 $\sigma_{i_1\cdots i_k}\varepsilon_\nu = \pm\varepsilon_\nu$. 由于含有 $2r+1$ 个素因子 $p_{ij}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 及 h 个其它素因子之 d_ν 的个数为

$$\binom{k}{2r+1}\binom{t-k}{h},$$

所以恰能被 $2r+1$ 个 $p_{ij}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 整除之 d_ν 的个数为

$$\binom{k}{2r+1}\left(1+\binom{t-k}{1}+\binom{t-k}{2}+\cdots+\binom{t-k}{t-k}\right)$$
$$= 2^{t-k}\binom{k}{2r+1},$$

因此

$$\Sigma_{i_1\cdots i_k} = \sum_{2r+1\leqslant k} 2^{t-k}\binom{k}{2r+1}.$$

因

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} = (1-1)^k = 0$$

及

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} = (1+1)^k = 2^k,$$

所以

$$\sum_{2r\leqslant k}\binom{k}{2r} = \sum_{2r+1\leqslant k}\binom{k}{2r+1} = 2^{k-1}.$$

从而

$$\Sigma_{i_1\cdots i_k} = 2^{t-1}. \tag{7}$$

2）取 $c = \varepsilon_1^{l_0 2^{t-1}}$，其中 $\varepsilon_1^{l_0} = \max\limits_{2 \leqslant j \leqslant s} |\varepsilon_j|$ 对于正整数 l，由关系式

$$\varepsilon_1^l \leqslant \varepsilon_j^{l_j} < \varepsilon_1^{l+l_0}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s-1, \tag{8}$$

确定诸正整数 $l_j (2 \leqslant j \leqslant s-1)$. 命

$$\eta_l = \varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2} \cdots \varepsilon_{s-1}^{l_{s-1}}, \tag{9}$$

则由(8)立即得(5). 今往证明(6). 将(8)式改写为

$$\varepsilon_1^{-l-l_0} < \varepsilon_j^{-l_j} \leqslant \varepsilon_1^{-l}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s-1, \tag{10}$$

则由 1) 可知，当 $2 \leqslant i \leqslant s$ 时有

$$|\eta_l^{(i)}| < \varepsilon_1^{(l+l_0)(s-1-2^{t-1})-l2^{t-1}} = \varepsilon_1^{-l+l_0 2^{t-1}-l_0} = c\varepsilon_1^{-l-1}$$

$$\leqslant c(\varepsilon_1^{-l}\varepsilon_2^{-l_2}\cdots\varepsilon_{s-1}^{-l_{s-1}})^{\frac{1}{s-1}} = c\eta_l^{-\frac{1}{s-1}},$$

故得(6)式. 引理证完.

构造方阵

$$\Omega = (\omega_i^{(j)}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s. \tag{11}$$

则

$$S = \Omega'\Omega = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{12}$$

此处 $A = (a_{ij})(1 \leqslant i, j \leqslant m+1)$ 及 $B = (b_{ij})\ (1 \leqslant i, j \leqslant s-m-1)$，其中 $a_{11} = 2^t$，$a_{ii} = 2^{t-2}(x_{i-1}^2 + d_{i-1}y_{i-1}^2)(2 \leqslant i \leqslant m+1)$，$a_{1j} = a_{j1} = 2^{t-1}x_{j-1}\ (2 \leqslant j \leqslant m+1)$，$a_{ij} = 2^{t-2}x_{i-1}x_{j-1}$ $(2 \leqslant i, j \leqslant m+1, i \neq j)$，$b_{ii} = 2^t d_{m+i}(1 \leqslant i \leqslant s-m-1)$ 及 $b_{ij} = 0(i \neq j)$.

命 $\eta_l(l = 1, 2, \cdots)$ 为适合于(5)，(6)之单位贯，显然 η_l 可以表示为 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 的有理整系数的线性表达式. 假定

$$\eta_l = \sum_{i=1}^{s} k_i^{(l)} \omega_i, \tag{13}$$

则由

$$(h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)}) = (k_1^{(l)}, \cdots, k_s^{(l)})S$$

得出

$$n_l = h_1^{(l)} = 2^{t-1}\left(2k_1^{(l)} + \sum_{i=1}^{m} x_i k_{i+1}^{(l)}\right) \tag{14}$$

及

$$h_j^{(l)} = \begin{cases} 2^{t-2}\left(2x_{j-1}k_1^{(l)} + d_{j-1}y_{j-1}^2 k_j^{(l)} + \sum_{i=2}^{m+1} x_{i-1}x_{j-1}k_i^{(l)}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } 2 \leqslant j \leqslant m+1, \\ 2^t k_j^{(l)} d_{j-1}, \quad \text{当 } m+2 \leqslant j \leqslant s. \end{cases} \tag{15}$$

故得

定理 1. 命 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 为由满足(5), (6)之单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 及 (13),(14),(15) 定义的整数组贯,则得有理逼近式

$$\left|\frac{h_i^{(l)}}{n_l} - \omega_l\right| < c(\mathscr{D}_s) n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{16}$$

附记.

引理 1 提供了定理 1.2 在代数数域 $\mathscr{D}_s$ 中的一个直接证明,证明中未涉及到方程组 (1.5) 的求解问题,且证明还提供了在 $\mathscr{D}_s$ 中算出单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 的简捷算法. 但域 $\mathscr{D}_s$ 的缺点为维数需限制为 $s = 2^t$, 且 η_l 递增太快,所以在实际应用时,远不及实分圆域 $\mathscr{R}_s$ 方便. 还有一些知道独立单位组的完实域, 亦有类似缺点,在此就不再列举了.

§7. 三次域

命 $R(\alpha)$ 为三次实代数数域及 α 适合于

$$x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0, \tag{1}$$

此处 a_1, a_2 为有理整数及 $a_0 = \pm 1$. 又假定 $\alpha > 1$ 及 $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ 为一对共轭复数.

取 $R(\alpha)$ 的基底为 $1, \alpha, \alpha^2$ 及单位贯 $\eta_l = \alpha^l (l = 1, 2, \cdots)$, 则显然有

$$|\eta_l^{(i)}| = \eta_l^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 2, 3. \tag{2}$$

所以

$$n_l = \alpha^l + \alpha^{(2)l} + \alpha^{(3)l}, \quad l = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

及

$$h_j^{(l)} = \alpha^{l+j} + \alpha^{(2)l+j} + \alpha^{(3)l+j} = n_{l+j}, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

因此有基底的有理逼近式

$$\left|\frac{n_{l+j}}{n_l} - \alpha^j\right| \leqslant c(\alpha) n_l^{-\frac{3}{2}}, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

此处 n_l 与 $h_l^{(j)}(j = 1, 2)$ 都取自同一个整数贯 $n_l(l = 1, 2, \cdots)$. 今往求出其表达式. 由根与系数的关系可知

$$n_0 = 3, \quad n_1 = a_2, \quad n_2 = a_2^2 + 2a_1 \tag{6}$$

而当 $l \geqslant 3$ 时,由(1)可知

$$\begin{aligned} n_l &= \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)l} = \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)l-3}\alpha^{(i)3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)l-3}(a_2\alpha^{(i)2} + a_1\alpha^{(i)} + a_0) \\ &= a_2 n_{l-1} + a_1 n_{l-2} + a_0 n_{l-3} \end{aligned} \tag{7}$$

即 n_l 适合一个简单的递推公式,因而计算更为简便.

例如取 α 适合于

$$x^3 - x - 1 = 0, \tag{8}$$

则显然(8)有一个实根 α 满足 $1 < \alpha < 2$. 由

$$x^3 - x - 1 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^{-1})$$

及

$$\alpha^2 - 4\alpha^{-1} = (\alpha^3 - 4)\alpha^{-1} = (\alpha - 3)\alpha^{-1} < 0$$

可知 $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ 是一对共轭复根. 命

$$\eta_l = \alpha^l, \quad l = 1, 2, \cdots$$

则 n_l 适合于关系式

$$n_0 = 3, \ n_1 = 0, \ n_2 = 2, \ n_l = n_{l-2} + n_{l-3} \quad (l \geqslant 3). \tag{9}$$

显然当 $R(\alpha)$ 为二次域,此处 $\alpha > 1$ 为单位,则由这一方法得到的 α 的渐近分数,除初始值外,就是普通连分数.

附记.

本章求单位 η_l 的目的在于使 η_l 的值大于 l 及其共轭数的绝对值都差不多大小. 其实由本章的方法也可以看出只要 η_l 是代数整数 $> l$ 及

$$\sum_{i=2}^{s} |\eta_l^{(i)}| = o(\eta_l),$$

就可以得出精密度较差的有理逼近结果. 又如 η_l 特别取作 $\eta_l = \alpha^l (l = 1, 2, \cdots)$, 则由此得到的有理逼近就是所谓 Jacobi-Perron 算法 (algorichm). 在此只要选取 $\alpha > 1$, 而其共轭数的绝对值都 < 1. 有这种性质的数也就是所谓 PV 数. 我们将在下一章加以讨论. 因此本章得到的单位贯 $\eta_l (l = 1, 2, \cdots)$ 不仅都是 PV 数, 而且是更精致即更合乎计算数学用的 PV 数.

注　　释

§5. 定理 1 见 Ramachandra, K. [1]. 其余参看华罗庚与王元[1, 4, 5, 6, 7, 8].

第二章　递推整数贯与有理逼近

§1. 初等对称函数的递推公式

命 $\mathscr{F}_s = R(\alpha)$ 为一个 s 次实代数数域．本章介绍的基底的有理逼近方法是由 $\eta_l = \alpha^l (l = 1, 2, \cdots)$ 出发而得来的．这种方法即所谓 Jacobi-Perron 算法 (algorithm)（参看 Bernstein, L. [1]），精密度较差．但因为有历史价值及计算起来较为方便，所以我们仍加以介绍．

假定 α 所适合的既约整系数方程是

$$f(x) = x^s - a_{s-1}x^{s-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = 0, \tag{1}$$

并假定

$$\alpha(=\alpha^{(1)}) > 1, \quad |\alpha^{(2)}| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha^{(s)}| < 1, \tag{2}$$

有这种性质的数 α 称为 PV 数．命

$$\rho = -\frac{\log|\alpha^{(s)}|}{\log\alpha}, \tag{3}$$

则由(3)可得

$$0 < \rho \leqslant \frac{1}{s-1} - \frac{\log|a_0|}{(s-1)\log\alpha} \tag{4}$$

$\left(|\alpha^{(s)}| = \dfrac{|a_0|}{\alpha|\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(s-1)}|} \geqslant \dfrac{|a_0|}{\alpha|\alpha^{(s)}|^{s-2}}\right)$ 及

$$|\alpha^{(i)}| \leqslant \alpha^{-\rho}, \quad i = 2, 3, \cdots, s. \tag{5}$$

作方程 (1) 的根的初等对称函数

$$S_l = \alpha^l + \alpha^{(2)l} + \cdots + \alpha^{(s)l}, \quad l = 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

则 S_l 都是有理整数．不妨假定 $S_l > 0$，由(5)得

$$|S_l - \alpha^l| \leqslant (s-1)|\alpha^{(s)}|^l = (s-1)\alpha^{-\rho l}. \tag{7}$$

又由于

$$S_l \leqslant \alpha^l + (s-1) < s\alpha^l,$$

所以代入(7)即得

$$|S_l - \alpha^l| \leqslant (s-1)s^\rho S_l^{-\rho}. \tag{8}$$

习知诸 S_l 可以由 Newton 公式[1]来计算，即

$$\begin{aligned} &S_0 = s,\ S_1 = a_{s-1},\ S_2 = a_{s-1}S_1 + 2a_{s-2}, \cdots \\ &S_{s-1} = a_{s-1}S_{s-2} + \cdots + sa_1 \end{aligned} \tag{9}$$

与

$$S_n = a_{s-1}S_{n-1} + a_{s-2}S_{n-2} + \cdots + a_1 S_{n-s+1} + a_0 S_{n-s} (n \geqslant s). \tag{10}$$

定理 1. 当 $1 \leqslant k \leqslant s-1$ 时有

$$\left|\frac{S_{n+k}}{S_n} - \alpha^k\right| \leqslant c(\alpha) S_n^{-1-\rho}. \tag{11}$$

证. 由(8)可知

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+k}}{S_n} &= \frac{\alpha^{n+k} + O(S_{n+k}^{-\rho})}{\alpha^n + O(S_n^{-\rho})} \\ &= \alpha^k(1 + O(S_n^{-1-\rho}))(1 + O(S_n^{-1-\rho}))^{-1} \\ &= \alpha^k + O(S_n^{-1-\rho}). \end{aligned}$$

定理证完.

附记.

由(4)可以看出最好取 α 为单位.

§ 2. S_n 的推广

命 ξ 为 $R(\alpha)$ 中的任一数，命

$$Q_n = \sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n}, \tag{1}$$

这就是 S_n 的推广，它亦有如 S_n 一样的递推公式(1.10)(即 § 1，(10)式). 实际上，当 $n \geqslant s$ 时，由(1.1)可知

---

1) 关于 Newton 公式，请查阅 Van der Waerden, B. L., *Algebra*, Spr.-Ver., 1955.

$$Q_n = \sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n-s}\alpha^{(i)s} = \sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n-s}(a_{s-1}\alpha^{(i)^{s-1}} + \cdots$$

$$+ a_1\alpha^{(i)} + a_0) = a_{s-1}\sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n-1} + \cdots$$

$$+ a_1\sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n-s+1} + a_0\sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)}\alpha^{(i)n-s}$$

$$= a_{s-1}Q_{n-1} + \cdots + a_1Q_{n-s+1} + a_0Q_{n-s}, \tag{2}$$

因而所不同的只是初始值 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{s-1}$ 而已.

给了初始值 $Q_0, \cdots, Q_{s-1}$, 如何求 ξ, 其方法是

$$(Q_0, \cdots, Q_{s-1}) = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(s)})\Omega, \tag{3}$$

这儿

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1, & \alpha^{(1)}, & \cdots, & \alpha^{(1)s-1} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1, & \alpha^{(s)}, & \cdots, & \alpha^{(s)s-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

命

$$\Omega'\Omega = S, \tag{5}$$

则 S 是有理整元素方阵. 由(3)得

$$(Q_0, \cdots, Q_{s-1}) = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(s)})\Omega'^{-1}\Omega'\Omega, \tag{6}$$

即

$$(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(s)}) = (Q_0, \cdots, Q_{s-1})S^{-1}\Omega', \tag{7}$$

这样就求出 ξ 来了. 给了有理整数 $Q_0, \cdots, Q_{s-1}$, 由(2)即可知 $Q_n (n \geqslant s)$ 都是有理整数.

定理 1. 命 $\mathbf{Q} = (Q_0, \cdots, Q_{s-1})$ 为一个非零整矢量, 则当 $1 \leqslant k \leqslant s-1$ 及 $n > M(\mathbf{Q}, \alpha)$ 时有 $|Q_n| > 1$ 及

$$\left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n} - \alpha^k\right| \leqslant c(\mathbf{Q}, \alpha)|Q_n|^{-1-\rho}. \tag{8}$$

证. 由(1)与(7)可知当 $n > M$ 时有 $|Q_n| > 1$ 及

$$Q_n = \xi\alpha^n + O(|\alpha^{(s)}|^n) = \xi\alpha^n + O(\alpha^{-\rho n})$$
$$= \xi\alpha^n + O(|Q_n|^{-\rho}),$$

由此易得所证.

上面讲的是初始值的改换，现在来讲讲基底的改换．命 $\omega_1(=1), \omega_2, \cdots, \omega_s$ 为 $R(\alpha)$ 的任意一组基底，则

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{s} t_{jk}\alpha^{k-1}, \quad j = 2, \cdots, s, \tag{9}$$

此处 $t_{jk}(2 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant k \leqslant s)$ 都是有理数．定义

$$Q_n(j) = \sum_{k=1}^{s} t_{jk}Q_{n+k-1}, \quad j = 2, \cdots, s, \tag{10}$$

则显然诸 $Q_n(j)(2 \leqslant j \leqslant s)$ 亦适合于递推公式

$$Q_n(j) = a_{s-1}Q_{n-1}(j) + \cdots + a_1Q_{n-s+1}(j) + a_0Q_{n-s}(j) \quad (n \geqslant s), \tag{11}$$

其中初始值 $Q_0(j), \cdots, Q_{s-1}(j)$ 由 $Q_0, \cdots, Q_{2s-2}$ 及诸 t_{jk} 由(10)确定．由定理 1 立即推出

定理 2. 在定理 1 的假定下，对于任意基底(9)皆有

$$\left|\frac{Q_n(j)}{Q_n} - \omega_j\right| = O(|Q_n|^{-1-\rho}), \quad j = 2, \cdots, s, \tag{12}$$

此处与“O”有关的常数依赖于 $\mathbf{Q}, \alpha$，与诸 ω_j.

我们也可以用“杨辉三角法”(参看华罗庚[4])来证明定理 1．假定给了一组非全为零的整数 $Q_0, \cdots, Q_{s-1}$ 作为初始值及 $Q_n(n \geqslant s)$ 由递推公式(2)来定义，则

$$\begin{aligned}(1 - a_{s-1}x - \cdots - a_0x^s)\sum_{n=0}^{\infty} Q_nx^n &= Q_0 + (Q_1 - a_{s-1}Q_0)x + \cdots + (Q_{s-1} - a_{s-1}Q_{s-2} - \cdots \\ &\quad - a_1Q_0)x^{s-1} = P_{s-1}(x),\end{aligned} \tag{13}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_nx^n = \frac{P_{s-1}(x)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - \alpha^{(i)}x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{1 - \alpha^{(i)}x}, \tag{14}$$

此处

$$A_i = \frac{\alpha^{(i)s-1}P_{s-1}(\alpha^{(i)-1})}{\prod_{j\neq i}(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)})}, \quad i = 1, 2, \cdots, s. \tag{15}$$

将(15)之右端展开成幂级数,再比较 x^n 之系数即得

$$Q_n = \sum_{i=1}^{s} A_i \alpha^{(i)n}. \tag{16}$$

由于 $Q_0, \cdots, Q_{s-1}$ 不全为零及 $1, \alpha, \cdots, \alpha^{s-1}$ 为 $R(\alpha)$ 的基底,所以 $A_i \neq 0$, 故由(16)即得定理 1 的结论.

附记.

1. 在实际应用时,我们常常取初始值为 $Q_0 = \cdots = Q_{s-2} = 0$, $Q_{s-1} = 1$, 而基底则取作 $1, \omega_2, \cdots, \omega_s$. 此处

$$\omega_j = \alpha^{j-1} - a_{s-1}\alpha^{j-2} - \cdots - a_{s-j+2}\alpha - a_{s-j+1},$$
$$j = 2, \cdots, s. \tag{17}$$

于是由 (1.1) 可知

$$\omega_j = (a_{s-j}\alpha^{s-j} + \cdots + a_1\alpha + a_0)\alpha^{-s+j-1},$$
$$j = 2, \cdots, s.$$

由(17)与(18)可得

$$\lceil \omega \rceil \leqslant s \max_{0 \leqslant j \leqslant s-1} |a_j|.$$

(参看 Perron, O. [1] 与 Bernstein, L. [1]).

2. 由 (1.4) 可知

$$0 < \rho \leqslant \frac{1}{s-1}.$$

Perron, O.[1] 证明过,关系式

$$\left|\frac{Q_{n+1}}{Q_n} - \alpha\right| < c(\mathbf{Q}, \alpha)|Q_n|^{-1-\frac{1}{s-1}},$$

仅当 $s = 2$ (即普通之连分数)与 $s = 3$, 而 $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ 又是一对共轭复数时,才能成立,请比较 § 1.2 (即第一章 § 2), § 1.7 与 § 5. 因此除上述情况外,用本节方法得到的关于 $\mathscr{F}_s$ 基底的有理逼近不可能达到上一章所达到的精密度.

3. 用这一方法算出 Q_n 的计算量亦为 $O(\log|Q_n|)$, 但由于 Q_n 适合一个简单的递推公式,所以算法比上章简便些.

§3. PV 数

命$\mathscr{F}_s$为任意 s 次实代数数域，本节将证明经过 $c(\mathscr{F}_s)$ 次初等运算即可得到 $\mathscr{F}_s$ 的一个 s 次 PV 数 α，从而 $\mathscr{F}_s = R(\alpha)$，故由 $\eta_l = \alpha^l (l = 1, 2, \cdots)$ 出发，由 §1-2 的方法即可得到 $\mathscr{F}_s$ 基底的有理逼近.

我们需要下列二引理.

引理 1. 命 $s \geqslant 2$, $\xi_1, \cdots, \xi_s$ 是 $x_1, \cdots, x_s$ 的 s 个线性型，其行列式 $\Delta \neq 0$，其中有 r_1 个型是实系数的，r_2 对是共轭复系数的，$r_1 + 2r_2 = s$. 假定 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 s 个正数，$\lambda_{r_1+j} = \lambda_{r_1+r_2+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r_2)$ 及 $\lambda_1 \cdots \lambda_s \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} |\Delta|$，则必有一个异于原点之整点使

$$|\xi_1| \leqslant \lambda_1, \cdots, |\xi_s| \leqslant \lambda_s.$$

证明见华罗庚 [1] 第二十章.

引理 2. 命 α 是 $\mathscr{F}_s$ 中之一数，命 α 所适合的既约方程为

$$h(x) = 0, \quad \partial^0 h = l,$$

又命

$$g(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha^{(i)}),$$

则 $g(x)$ 为一个有有理系数的多项式，且

$$g(x) = c(h(x))^{\frac{s}{l}},$$

其中 $l|s$, c 为一个有理数.

证明见华罗庚 [1] 第十六章.

假定 $s = r_1 + 2r_2$，其中 $r_1 \geqslant 1$，命 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的任意一组基底，其中 ω_i 都是代数整数，作线性型组

$$\alpha^{(i)} = \omega_1^{(i)} x_1 + \cdots + \omega_s^{(i)} x_s, \quad i = 1, 2, \cdots, s, \tag{1}$$

其中当 $i = 1, 2, \cdots, r_1$ 时，$\alpha^{(i)}$ 是实系数线性型，其余则为复系数线性型，而且

$$\alpha^{(r_1+r_2+j)} = \overline{\alpha^{(r_1+j)}}, \quad j = 1, 2, \cdots, r_2. \tag{2}$$

命

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_1, & \cdot\ \cdot & \\ & & \\ \omega_1, & \cdots, & \omega_s^{(s)}\end{pmatrix}. \ (\omega_j^{(i)}),1\leqslant i,j\leqslant s \tag{3}$$

记 $\det\Omega=\Delta$, 取 $0<\varepsilon<1$ 及

$$\lambda_1=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}|\Delta|(1-\varepsilon)^{-(s-1)},\quad \lambda_2=\cdots=\lambda_s=1-\varepsilon, \tag{4}$$

则由引理 1 可知必有非原点之整点 $(x_1,\cdots,x_s)$ 使

$$|\alpha|\leqslant\lambda_1,\quad |\alpha^{(i)}|\leqslant 1-\varepsilon\left(\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r\frac{2}{s-1}}|\Delta|^{\frac{1}{s-1}}\alpha^{-\frac{1}{s-1}}\right),$$

$$2\leqslant i\leqslant s, \tag{5}$$

故 α 为非零代数整数. 不妨假定 $\alpha>0$, 由

$$|N(\alpha)|=\alpha|\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(s)}|\geqslant 1$$

可知

$$\alpha\geqslant(1-\varepsilon)^{-(s-1)}>1, \tag{6}$$

故由(5),(6)及引理 2 可知 α 为 s 次 PV 数.

今往计算求出 α 的计算量,由(1)可知

$$(x_1,\cdots,x_s)=(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(s)})\Omega'^{-1}. \tag{7}$$

假定 Δ 的各元素的余子式的最大绝对值为 W, 则

$$|x_i|\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\frac{W}{(1-\varepsilon)^{s-1}}+(s-1)(1-\varepsilon)\frac{W}{|\Delta|}$$

$$=c(\mathscr{F}_s),\quad 1\leqslant i\leqslant s. \tag{8}$$

将平行多面体(8)中之非原点之整点逐次代入(5)验证, 即可得一个适合于(5)之非零整点,从而得到 s 次 PV 数 α.

附记.

在实际应用时, 最好寻求这样的 PV 数 α, 即 α 为单位, 而其共轭数的绝对值又都差不多大小, 但同时还要求 α 的定义方程的系数的绝对值尽可能小一些, 否则由此得来的整数贯 Q_n 是很稀疏的,不便于使用. 我们将在以下几节给出具体的 PV 数例子.

§4. 方程 $x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 之根

命 $s \geqslant 2$ 及

$$F(x) = x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1, \tag{1}$$

将 $F(x)$ 的最大实根记为 $\eta(=\eta^{(1)})$，它的其他根记为 $\eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(s)}$.

引理 1. 有估计

$$2 - 2^{-(s-1)} < \eta < 2 - 2^{-s} \tag{2}$$

与

$$|\eta^{(i)}| \leqslant \eta - 1, \quad 2 \leqslant i \leqslant s. \tag{3}$$

在证明引理 1 之前，先证明下面的引理[1].

引理 2. 若多项式

$$g(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的系数满足 $a_s \geqslant a_{s-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 \geqslant a_0 > 0$，则方程无模大于 1 的根.

证. 因当 $|x| > 1$ 时有

$$\begin{aligned}|(1-x)g(x)| &\geqslant a_s|x|^{s+1} - ((a_s - a_{s-1})|x|^s \\ &\quad + (a_{s-1} - a_{s-2})|x|^{s-1} + \cdots + (a_1 - a_0)|x| + a_0) \\ &> a_s|x|^s(|x| - 1) > 0,\end{aligned}$$

故得引理.

引理 1 的证明. 1) 记

$$Q(x) = (x-1)F(x) = x^{s+1} - 2x^s + 1,$$

则得

$$\begin{aligned}Q(2 - 2^{-s}) &= (2 - 2^{-s})^{s+1} - 2(2 - 2^{-s})^s + 1 \\ &= 1 - 2^{-s}(2 - 2^{-s})^s = 1 - (1 - 2^{-(s+1)})^s > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

与

$$\begin{aligned}Q(2 - 2^{-(s-1)}) &= (2 - 2^{-(s-1)})^{s+1} - 2(2 - 2^{-(s-1)})^s + 1 \\ &= 1 - 2^{-(s-1)}(2 - 2^{-(s-1)})^s = 1 - (2^{s^{-1}} - 2^{-s+s-1})^s.\end{aligned}$$

---

1) 参阅 Uspensky, J. V., *Theory of equations*, *MH book Comp.*, 1948.

命

$$g(s) = 2^s - 1 - 2^{s-s^{-1}},$$

则

$$g'(s) = 2^s \log 2 - 2^{s-s^{-1}}(1 + s^{-2}) \log 2$$
$$= 2^s(1 - 2^{-s^{-1}}(1 + s^{-2})) \log 2.$$

因

$$2^s > (1 + s^{-2})^{s^2}, \quad s \geqslant 2,$$

即当 $s \geqslant 2$ 时，$g'(s) > 0$，所以 $g(s)$ 为递增函数，因此

$$2^s - 1 - 2^{s-s^{-1}} > 0,$$
$$2^{s^{-1}} - 2^{-s+s^{-1}} > 1,$$

故得

$$Q(2 - 2^{-(s-1)}) < 0. \tag{5}$$

由(4)、(5)即得(2)。

2）命

$$F(x) = (x - \eta) R(x),$$
$$R(x) = x^{s-1} + \beta_{s-2} x^{s-2} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0,$$

则得线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} -\eta\beta_0 = -1, \\ \beta_0 - \eta\beta_1 = -1, \\ \cdots\cdots \\ \beta_{s-2} - \eta = -1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

解之得

$$\beta_0 = \frac{1}{\eta}, \quad \beta_1 = \frac{\eta + 1}{\eta^2}, \cdots,$$

$$\beta_{s-3} = \frac{\eta^{s-3} + \eta^{s-4} + \cdots + \eta + 1}{\eta^{s-2}},$$

$$\beta_{s-2} = \frac{\eta^{s-2} + \eta^{s-3} + \cdots + \eta + 1}{\eta^{s-1}} = \eta - 1.$$

命

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{\beta_j}{\beta_{j+1}}, & \text{当 } 0 \leqslant j \leqslant s-3, \\ \beta_j, & \text{当 } j = s-2, \end{cases} \tag{7}$$

因当 $x \geqslant 0$ 时, $\frac{x}{x+1}$ 为 x 的递增函数及

$$\gamma_j = \frac{\eta^{j+1} + \eta^j + \cdots + \eta}{\eta^{j+1} + \eta^j + \cdots + \eta + 1} \quad (0 \leqslant j \leqslant s-2),$$

所以

$$\gamma_{s-2} > \gamma_{s-3} > \cdots > \gamma_1 > \gamma_0. \tag{8}$$

命 $x = \beta_{s-2}y$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(y) = R(\beta_{s-2}y) &= \beta_{s-2}^{s-1}y^{s-1} + \beta_{s-2}^{s-1}y^{s-2} + \beta_{s-3}\beta_{s-2}^{s-3}y^{s-3} \\ &\quad + \cdots + \beta_1\beta_{s-2}y + \beta_0.\end{aligned}$$

由(8)可知

$$\beta_{s-2}^{s-1} > \beta_{s-3}\beta_{s-2}^{s-3} > \cdots > \beta_1\beta_{s-2} > \beta_0, \tag{9}$$

因此由引理 2 可知 $\widetilde{R}(y) = 0$ 的根的模皆 $\leqslant 1$,即 $R(x)$ 的根的模皆 $\leqslant \beta_{s-2} = \eta - 1$. 引理证完.

引理 3. 1) 当 $s = 2$ 时, $|\eta^{(2)}| = \eta^{-1}$,

2) 当 $s = 3$ 时, $|\eta^{(2)}| = |\eta^{(3)}| = \eta^{-\frac{1}{2}}$.

证. 1) 显然成立. 下面证明 2). 由

$$x^3 - x^2 - x - 1 = (x - \eta)(x^2 + (\eta - 1)x + \eta^{-1}), \quad \eta > 1$$

及

$$\begin{aligned}(\eta - 1)^2 - 4\eta^{-1} &= \frac{\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 4}{\eta} \\ &= \frac{-\eta^2 + 2\eta - 3}{\eta} = -\frac{(\eta - 1)^2 + 2}{\eta} < 0\end{aligned}$$

可知 $\eta^{(2)}$ 与 $\eta^{(3)}$ 是一对共轭复数,因此

$$|\eta^{(2)}| = |\eta^{(3)}| = \eta^{-\frac{1}{2}}.$$

引理证完.

§5. 方程 $x^s - Lx^{s-1} - 1 = 0$ 之根

命 $s \geqslant 2$ 及

$$G(x) = x^s - Lx^{s-1} - 1, \tag{1}$$

此处 L 为整数 $\geqslant 2$,记 $G(x)$ 的最大实根为 $\tau(=\tau^{(1)})$, 它的其它根记为 $\tau^{(2)}, \cdots, \tau^{(s)}$.

Minkowski, H.[1] 证明过，除 1) α 为二次实代数数，2) α 为三次实代数数，其共轭数为一对共轭复数外，任何实代数数域 $R(\alpha)$ 皆不能有单位 η，其共轭数适合于

$$|\eta^{(2)}| = \cdots = |\eta^{(s)}|.$$

下面的引理将证明虽不能全相等，但可以有单位，其共轭数都是渐近相等的例子，确切地说，

$$|\tau^{(i)}| = L^{-\frac{1}{s-1}}(+O(L^{-1-\frac{1}{s-1}})), \quad i = 2, \cdots, s,$$

因此当 L 充分大时，τ 的共轭数是渐近相等的.

引理 1. 有估计

$$L < \tau < L + L^{-(s-1)} \tag{2}$$

与

$$(L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}} < |\tau^{(i)}| < (L - (L-1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}},$$
$$2 \leqslant i \leqslant s. \tag{3}$$

证. 1) 由

$$G(L) = -1 < 0$$

及

$$G(L + L^{-(s-1)}) = L^{-(s-1)}(L + L^{-(s-1)})^{s-1} - 1 > 0,$$

即得(2)式

2) 命 χ 为方程

$$g(x) = x^s + Lx^{s-1} - 1 = 0$$

在(0,1)中的实根. 因在 (0, 1) 中，$g'(x) \neq 0$，所以 χ 为 $g(x) = 0$ 在 (0, 1) 中唯一的根. 由

$$g(0) = -1 < 0 \quad 与 \quad g(1) = L > 0$$

可知，对任何满足 $0 < \delta < \chi$ 的 δ 有 $g(\chi - \delta) < 0$，因此在复平面的圆 $|x| = \chi - \delta$ 上有

$$1 > |x^s + Lx^{s-1}|,$$

故由 Rouché 定理[1)] 可知，函数 1 与 $G(x)$ 在圆 $|x| < \chi - \delta$ 中有

---

1) 关于 Rouché 定理，请查阅 Titchmarsh, E. C., *The theory of functions, Oxford Univ. Pre.*, 1952.

同样个数的零点，即 $G(x)$ 在圆 $|x| < \chi - \delta$ 中无零点. 命 $\delta \to 0$，则可知 $G(x) = 0$ 的根的模皆 $\geqslant \chi$. 因

$$g((L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}}) = ((L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}} + L)$$
$$\times(L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-1} - 1 < (L^{-\frac{1}{s-1}} + L)(L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-1}$$
$$- 1 = 0,$$

所以得不等式(3)之左端，即

$$|\tau^{(i)}| \geqslant \chi > (L + L^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s.$$

3）假定 $L > 2$，命 Ω 为方程

$$h(x) = x^s - Lx^{s-1} + 1 = 0$$

在区间 $(0, 1)$ 中仅有的实根，由

$$h(0) = 1 > 0 \quad 与 \quad h(1) = -L + 2 < 0$$

可知，对于任何满足 $0 < \delta < 1 - \Omega$ 的 δ 皆有 $h(\Omega + \delta) < 0$，所以在圆 $|x| = \Omega + \delta$ 上有

$$|Lx^{s-1}| > |x^s + 1|,$$

故由 Rouché 定理可知，x^{s-1} 与 $G(x)$ 在圆 $|x| < \Omega + \delta$ 中有同样个数的零点，即 $G(x)$ 在圆 $|x| < \Omega + \delta$ 中有 $s - 1$ 个零点．命 $\delta \to 0$，则得 $G(x) = 0$ 在圆 $|x| \leqslant \Omega$ 中有 $s - 1$ 个根．因

$$h((L - (L - 1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}})$$
$$= ((L-(L-1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}} - L)(L-(L-1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-1} + 1$$
$$= (L - (L - 1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-1}((L - (L - 1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}}$$
$$- (L - 1)^{-\frac{1}{s-1}}) < 0,$$

故得

$$|\tau^{(i)}| \leqslant \Omega < (L - (L - 1)^{-\frac{1}{s-1}})^{-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant s.$$

4）假定 $L = 2$，下面证明方程

$$G(x) = x^s - 2x^{s-1} - 1 = 0$$

有 $s - 1$ 个根的模 < 1，这等价于证明方程

$$\overline{G}(y) = y^s + 2y - 1 = 0$$

有 $s - 1$ 个根的模 > 1．命 $\delta > 0$，则由 Rouché 定理可知，$\overline{G}_\delta(y)$

$= y^s + (2+\delta)y - 1$ 与 y 在单位圆 $|y| < 1$ 中有同样多的零点. 所以 $\bar{G}_\delta(y) = 0$ 有 $s-1$ 个根的模 $\geqslant 1$. 命 $\delta \to 0$, 则得 $\bar{G}(y) = 0$ 有 $s-1$ 个根的模 $\geqslant 1$. 因 $\bar{G}(y) = 0$ 无根适合 $|y| = 1$, 所以 $\bar{G}(y) = 0$ 有 $s-1$ 个根的模 >1.

由 3), 4) 即得不等式 (3) 之右端. 引理证完.

引理 2. 1) 当 $s = 2$ 时, $|\tau^{(2)}| = \tau^{-1}$,

2) 当 $s = 3$ 时, $|\tau^{(2)}| = |\tau^{(3)}| = \tau^{-\frac{1}{2}}$.

证. 1) 显然成立. 下面证明 2). 由

$$x^3 - Lx^2 - 1 = (x-\tau)(x^2 + (\tau - L)x + \tau^{-1}), \quad \tau > L$$

及

$$(\tau - L)^2 + 4\tau^{-1} = \frac{\tau^3 - 2L\tau^2 + L^2\tau - 4}{\tau}$$

$$= \frac{-L\tau^2 + L^2\tau - 3}{\tau} < 0$$

可知 $\tau^{(2)}$ 与 $\tau^{(3)}$ 是一对共轭复数,因此

$$|\tau^{(2)}| = |\tau^{(3)}| = \tau^{-\frac{1}{2}}.$$

引理证完.

§6. 方程 $x^s - s^2r^{s-1}x^{s-1} + (-1)^{s-2}A_{s-2}r^{s-2}x^{s-2} + \cdots - A_1rx - 1 = 0$ 之根

命 $s \geqslant 2$ 及 $A_1, \cdots, A_{s-2}$ 为由下面关系式定义的整数

$$A_1 = \binom{2s}{1}, \quad A_k = \binom{2s}{k} - A_1\binom{2s-2}{k-1}$$

$$- \cdots - A_{k-1}\binom{2s-2k+2}{1}, \quad s-2 \geqslant k > 1. \qquad (1)$$

命 r 为适合于关系式

$$s^2 > \frac{2}{r^{s-1}} + \frac{|A_1|}{r^{s-2}} + \cdots + \frac{|A_{s-2}|}{r} \qquad (2)$$

的正整数,又命

$$H(x) = x^s - s^2r^{s-1}x^{s-1} + (-1)^{s-2}A_{s-2}r^{s-2}x^{s-2} + \cdots - A_1rx - 1, \quad (3)$$

记 $H(x)$ 的最大实根为 $\omega(=\omega^{(1)})$，它的其他根记为 $\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}$.

引理 1. 有估计

$$\omega = s^2 r^{s-1} + O(r^{\frac{s}{2}-1}) \tag{4}$$

与

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{4\left(\sin\frac{\pi i}{s}\right)^2 r} + O(r^{-\frac{s}{2}-1}),\quad 1\leqslant i\leqslant s-1, \tag{5}$$

此处与“O”有关之常数仅依赖于 s.

证明之前先证下面的引理.

引理 2. 有下列恒等式

$$\begin{aligned}&(a+b)^{2s} - A_1 ab(a+b)^{2s-2} - A_2 a^2 b^2 (a+b)^{2s-4} - \cdots\\ &\quad - A_{s-2} a^{s-2} b^{s-2} (a+b)^4 + (-1)^{s-1} s^2 a^{s-1} b^{s-1} (a+b)^2\\ &\quad - (a^s + (-1)^{s-1} b^s)^2 = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

证. $(a+b)^{2s} - A_1 ab(a+b)^{2s-2}$ 为 a, b 之对称函数，但无 ab^{2s-1} 之项. $(a+b)^{2s} - A_1 ab(a+b)^{2s-2} - A_2 a^2 b^2 (a+b)^{2s-4}$ 亦为 a, b 之对称函数，但无 ab^{2s-1} 与 $a^2 b^{2s-2}$ 之项. 依次类推，因此

$$\begin{aligned}&(a+b)^{2s} - A_1 ab(a+b)^{2s-2} - A_2 a^2 b^2 (a+b)^{2s-4} - \cdots\\ &\quad - A_{s-1} a^{s-1} b^{s-1} (a+b)^2 - a^{2s} - b^{2s} - k a^s b^s = 0,\end{aligned}$$

此处 A_{s-1} 仍由 (1) 定义，而 k 为某待定整数，以 $a=-b$ 代入上式，则得

$$2b^{2s} + (-1)^s b^{2s} k = 0,$$

所以 $k = (-1)^{s-1} 2$，因而

$$\begin{aligned}&(a+b)^{2s} - A_1 ab(a+b)^{2s-2} - \cdots\\ &\quad - A_{s-1} a^{s-1} b^{s-1} (a+b)^2 - (a^s + (-1)^{s-1} b^s)^2 = 0.\end{aligned}$$

以 $(a+b)^2$ 除以上式各项后，再以 $a=-b$ 代入，则得

$$(-1)^s A_{s-1} b^{2s-2} - s^2 b^{2s-2} = 0,$$

所以 $A_{s-1} = (-1)^s s^2$. 引理证完.

引理 1 的证明. 在 (6) 中置 $a+b=y$，$ab=-r$ 及 $a^s + (-1)^{s-1} b^s = -1$，则得方程

$$\begin{aligned}&y^{2s} + A_1 r y^{2s-2} - A_2 r^2 y^{2s-4} - \cdots + (-1)^{s-1} A_{s-2} r^{s-2} y^4\\ &\quad + s^2 r^{s-1} y^2 - 1 = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

它以 $a+b$ 为解，其中 a, b 适合于

$$a=-\frac{r}{b},\quad a^s+(-1)^{s-1}b^s=-1. \tag{8}$$

将(8)的第一式代入第二式得

$$b^{2s}+(-1)^{s-1}b^s-r^s=0.$$

记 $\zeta=e^{\frac{\pi i}{s}}$ 为 $2s$ 次单位根，则解得

$$b=\left(\frac{(-1)^{s+l}+(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\zeta^l,\quad l=1,2,\cdots,2s.$$

或

$$\begin{aligned}
b&=\sqrt{r}\left(\frac{(-1)^{s+l}}{2r^{\frac{s}{2}}}+\left(1+\frac{1}{4r^s}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{s}}\zeta^l\\
&=\sqrt{r}\left(1+\frac{(-1)^{s+l}}{2r^{\frac{s}{2}}}+O(r^{-s})\right)^{\frac{1}{s}}\zeta^l\\
&=\sqrt{r}\left(1+\frac{(-1)^{s+l}}{2sr^{\frac{s}{2}}}+O(r^{-s})\right)\zeta^l,\\
&\qquad\qquad l=1,2,\cdots,2s.
\end{aligned} \tag{9}$$

代入(8)之第一式得

$$\begin{aligned}
a&=-\sqrt{r}\left(1+\frac{(-1)^{s+l-1}}{2sr^{\frac{s}{2}}}+O(r^{-s})\right)\zeta^l,\\
&\qquad\qquad l=1,2,\cdots,2s.
\end{aligned} \tag{10}$$

故得方程(7)的解

$$\begin{aligned}
y&=(\zeta^l-\xi^l)\sqrt{r}+\frac{(-1)^{s+l}(\zeta^l+\xi^l)}{2sr^{\frac{s-1}{2}}}\\
&\quad+O(r^{-s+\frac{1}{2}}),\quad 1\leqslant l\leqslant 2s.
\end{aligned} \tag{11}$$

将 $z=y^2$ 代入(7)可知方程

$$\begin{aligned}
&z^s+A_1rz^{s-1}-A_2r^2z^{s-2}-\cdots\\
&\quad+(-1)^{s-1}A_{s-2}r^{s-2}z^2+s^2r^{s-1}z-1=0
\end{aligned} \tag{12}$$

以

$$\begin{aligned}
z=s^{-2}r^{-s+1}+O\left(r^{-\frac{3s}{2}+1}\right),\quad -4\left(\sin\frac{\pi i}{s}\right)^2r+O\left(r^{-\frac{s}{2}+1}\right),\\
1\leqslant i\leqslant s-1
\end{aligned} \tag{13}$$

为根，将 $z = x^{-1}$ 代入 (12)，即可知 $H(x) = 0$ 的根适合于 (4) 与 (5). 引理证完.

附记

这证明了在代数可解域中也可以找到共轭数的无穷小阶相等的代数数. 很可能用 Lagrange 预解式 (resolvent) 法可以在代数可解域中找到与上节相仿的结果.

§ 7. 多项式之既约性

命

$$g(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{1}$$

此处 $a_i(0 \leqslant i \leqslant s-1)$ 都是整数，且 $a_0 \neq 0$.

定理 1. 若

$$|a_1| > |a_0^{s-1}| + |a_{s-1}a_0^{s-2}| + \cdots + |a_2a_0| + 1, \tag{2}$$

则 $g(x)$ 为有理数域 R 上的既约多项式.

证. 由(2)可知

$$|a_1a_0| > |a_0^s| + |a_{s-1}a_0^{s-1}| + \cdots + |a_2a_0^2| + |a_0|, \tag{3}$$

所以由 Rouché 定理可知，$g(x)$ 与 x 在圆 $|x| < |a_0|$ 中有同样个数的零点，因而 $g(x)$ 在圆 $|x| < |a_0|$ 中只有一个零点 ϑ，由(3)可知方程 $g(x) = 0$ 没有模等于 $|a_0|$ 的根.

若 $g(x) = u(x)v(x)$，此处 $u(x)$ 与 $v(x)$ 为有整系数且次数 $\geqslant 1$ 的多项式，又若 $u(\vartheta) = 0$，则 $v(x) = 0$ 的根的模皆 $> |a_0|$. 所以

$$|a_0| = |g(0)| = |u(0)v(0)| \geqslant |v(0)| > |a_0|,$$

此为矛盾，故得定理.

定理 2. 若 $g(x) = 0$ 仅有一个根 ϑ 有模 $\geqslant 1$，则 $g(x)$ 在 R 上是既约的.

证. 若 $g(x) = u(x)v(x)$，此处 $u(x)$ 与 $v(x)$ 为有整系数且次数 $\geqslant 1$ 的多项式，又若 $u(\vartheta) = 0$，则 $v(x) = 0$ 的根的模都小于 1，所以 $|v(0)| < 1$，此为矛盾，故得定理.

定理 3. 若

$$|a_{s-1}| > |a_{s-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0| + 1, \tag{4}$$
则 $g(x)$ 在 R 上是既约的.

证. 由(4)及 Rouché 定理可知 x^{n-1} 与 $g(x)$ 在 $|x| < 1$ 中有同样多的零点,所以 $g(x) = 0$ 仅有一个根 ϑ 有模 $\geqslant 1$, 故由定理 2 可知 $g(x)$ 为既约的. 定理证完.

定理 4. η, τ, ω 都是 s 次 PV 数.

证. 由引理 4.1 可知
$$\eta > 1, \quad |\eta^{(i)}| < 1, \quad 2 \leqslant i \leqslant s,$$
所以由定理 2 可知 $F(x)$ 是 R 上的既约多项式, 因此 η 是 s 次 PV 数. 同理可知 τ 亦 s 次 PV 数. 由定理 3 及其证明可知 $H(x)$ 为既约的及 ω 为 s 次 PV 数. 定理证完.

附记

定理 1 是 Perron, O. 定理的改进(见 Perron, O. [1]), 亦是 Bernstein, L. 定理的改进(见 Bernstein, L. [1], 定理 12). 定理 3 见 Perron, O. [1], 或 Perron, O. *Algebra* II, Berlin, 1951) 又需注意,多项式
$$x^s - x^{s-1} - 1 = 0$$
在 R 上不一定总是既约的, 例如
$$x^5 - x^4 - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1).$$
(参看 Bernstein, L. [1], 定理 11).

§ 8. η, τ, ω 的有理逼近

1) 命 $F_n(=F_n^{(s)})$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 为由下面的递推关系定义的整数贯
$$F_0 = F_1 = \cdots = F_{s-2} = 0, \quad F_{s-1} = 1,$$
$$F_{n+s} = F_{n+s-1} + F_{n+s-2} + \cdots + F_{n+1} + F_n, \quad n \geqslant 0. \tag{1}$$
由定理 7.4 可知方程
$$F(x) = x^s - x^{s-1} - \cdots - x - 1 = 0 \tag{2}$$
的最大实根 η 为 s 次 PV 数. 我们称贯 $F_n(=F_n^{(s)})$ 为广义的 s 维 Fibonacci 贯(见 Bernstein, L .[1]), 当 $s = 2$ 时, 就是普通的

Fibonacci 贯,因此 $F_n^{(s)}$ 是通常 Fibonacci 贯的推广. 命

$$\rho = -\frac{\log |\eta^{(s)}|}{\log \eta}, \tag{3}$$

则由引理 4.1 可知

$$\begin{aligned}\rho &\geqslant -\frac{\log(\eta - 1)}{\log \eta} \geqslant -\frac{\log(1 - 2^{-s})}{\log 2} \\ &\geqslant \frac{1}{2^s \log 2} + \frac{1}{2^{2s+1}}.\end{aligned} \tag{4}$$

取 $R(\eta)$ 的一组基底

$$\begin{aligned}&\omega_1 = 1, \ \omega_2 = \eta - 1, \\ &\omega_3 = \eta^2 - \eta - 1, \cdots, \ \omega_s = \eta^{s-1} - \cdots - \eta - 1,\end{aligned} \tag{5}$$

命

$$F_n(j) = F_{n+j-1} - F_{n+j-2} - \cdots - F_n, \quad 2 \leqslant j \leqslant s, \tag{6}$$

则由定理 2.2 可得

定理 1. 当 $n > s$ 时有

$$\left|\frac{F_n(j)}{F_n} - \omega_j\right| \leqslant c(\eta) F_n^{-1-\frac{1}{2^s \log 2}-\frac{1}{2^{2s+1}}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s. \tag{7}$$

当 $s = 2, 3$ 时,用引理 4.3 代替引理 4.1, 则得

定理 2. 当 $s = 2, 3$ 时, (7) 之右端可以分别换为 $c(\eta)F_n^{-2}$ 与 $c(\eta)F_n^{-\frac{3}{2}}$.

2) 命 $G_n(=G_n^{(s)})$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 为由下面递推公式定义的整数贯

$$\begin{aligned}&G_0 = G_1 = \cdots = G_{s-2} = 0, \quad G_{s-1} = 1, \\ &G_{n+s} = LG_{n+s-1} + G_n, \quad n \geqslant 0,\end{aligned} \tag{8}$$

此处 L 为整数 $\geqslant 2$. 由定理 7.4 可知方程

$$G(x) = x^s - Lx^{s-1} - 1 = 0 \tag{9}$$

的最大实根 τ 为 s 次 PV 数. 命

$$\rho = -\frac{\log |\tau^{(s)}|}{\log \tau}. \tag{10}$$

由于

$$\log\left(L-(L-1)^{-\frac{1}{s-1}}\right)=\log L+\log\left(1-L^{-1}(L-1)^{-\frac{1}{s-1}}\right)$$
$$\geqslant \log L - L^{-1}(L-1)^{-\frac{1}{s-1}} - L^{-2}(L-1)^{-\frac{2}{s-1}}$$
$$\geqslant \log L - L^{-1} - L^{-2},$$

及
$$\log\left(L+L^{-(s-1)}\right)=\log L+\log\left(1+L^{-s}\right)$$
$$\leqslant \log L + L^{-s},$$

所以由引理 5.1 得

$$\rho \geqslant \frac{\log L - L^{-1} - L^{-2}}{(s-1)(\log L + L^{-s})}$$
$$\geqslant \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{L\log L}-\frac{1}{L^2\log L}\right)\left(1-\frac{1}{L^s\log L}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{L\log L}-\frac{1}{L^2\log L}-\frac{1}{L^s\log L}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{L^{s+1}(\log L)^2}\right) \geqslant \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{2}{L\log L}+\frac{1}{L^{s+3}}\right). \quad (11)$$

故由定理 2.1 可得

定理 3. 当 $n \geqslant s$ 时有

$$\left|\frac{G_{n+i}}{G_n}-\tau^i\right| < c(\tau)\, G_n^{-1-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)L\log L}-\frac{1}{(s-1)L^{s+3}}},$$
$$1 \leqslant i \leqslant s-1. \quad (12)$$

当 $s=2, 3$ 时,用引理 5.2 代替引理 5.1, 则得

定理 4. 当 $s=2, 3$ 时, (12) 之右端可以分别换为 $c(\tau)G_n^{-2}$ 与 $c(\tau)G_n^{-\frac{3}{2}}$.

3) 命 $H_n(=H_n^{(s)})$ $(n=0, 1, \cdots)$ 为由下面递推公式定义的整数贯

$$H_0=H_1=\cdots=H_{s-2}=0, \quad H_{s-1}=1,$$
$$H_{n+s}=s^2r^{s-1}H_{n+s-1}+(-1)^{s-1}A_{s-2}r^{s-2}H_{n+s-2}$$
$$+\cdots+A_1rH_{n+1}+H_n, \quad n \geqslant 0, \quad (13)$$

此处 $A_1, \cdots, A_{s-2}$ 由 (6.1) 定义,而 r 适合 (6.2). 由定理 6.4 可知方程

$$H(x)=x^s-s^2r^{s-1}x^{s-1}+(-1)^{s-2}A_{s-2}r^{s-2}x^{s-2}$$
$$+\cdots-A_1rx-1=0 \tag{14}$$

的最大实根 ω 为 s 次 PV 数. 命

$$\rho=-\frac{\log|\omega^{(s)}|}{\log\omega}, \tag{15}$$

则由引理 6.1 可知

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{\log\left(4r\left(\sin\frac{\pi}{s}\right)^2\right)+O\left(r^{-\frac{s}{2}}\right)}{\log s^2r^{s-1}+O\left(r^{-\frac{s}{2}}\right)}\\&=\frac{\log r+2\log\left(2\sin\frac{\pi}{s}\right)+O\left(r^{-\frac{s}{2}}\right)}{(s-1)\log r+2\log s+O\left(r^{-\frac{s}{2}}\right)}\\&=\frac{1}{s-1}+\frac{c_1}{\log r}+\frac{c_2}{(\log r)^2}+O\left(\frac{1}{(\log r)^3}\right),\end{aligned} \tag{16}$$

此处

$$c_1=\frac{2\log\left(2\sin\frac{\pi}{s}\right)}{s-1}-\frac{2\log s}{(s-1)^2},$$

$$c_2=\frac{4(\log s)^2}{(s-1)^3}-\frac{4\log s\log\left(2\sin\frac{\pi}{s}\right)}{(s-1)^2}. \tag{17}$$

显然 H_n 为递增贯,故由定理 2.1 可得

定理 5. 当 $n\geqslant s$ 时有

$$\left|\frac{H_{n+j}}{H_n}-\omega^j\right|\leqslant c(\omega)H_n^{-1-\rho},\quad 1\leqslant j\leqslant s-1, \tag{18}$$

此处 ρ 由(16),(17)定义.

由这三个例子可以看出 τ 与 ω 的渐近分数有较好的逼近误差, 但 τ 与 ω 的定义方程的系数较大, 故由此得到的递推整数贯 G_n 与 H_n 都较稀疏 $\left(\text{即}\ \frac{G_{n+1}}{G_n}\ \text{与}\ \frac{H_{n+1}}{H_n}\ \text{较大}\right)$. 而 η 的渐近分数的逼近误差虽大一些,但 F_n 较紧密,故有应用价值.

附记.

关于普通二维 Fibonacci 贯的推广问题，除 § 1.3 与这里所讲的两种推广外，Raney, G. N.[1] 还给出了下面的推广. 命 $Q = Q_n = (a_{ij})$，此处当 $i + j \leqslant n + 1$ 时，$a_{ij} = 1$，否则 $a_{ij} = 0$. 命 $\phi_{n,0} = (1, 0, \cdots, 0)'$ 及 $\phi_{n,d+1} = Q\phi_{n,d}(d = 0, 1, \cdots)$，则称列矢量 $\phi_{n,d}$ 为广义 Fibonacci 贯.

命 $D_n(\lambda) = \det(Q - \lambda I)$ 为 Q 的特征方程，则当 $n = \frac{p-1}{2}$ (p 为素数 $\geqslant 5$)时，$D_n(\lambda)$ 在有理数域 R 上是既约的，但并非对所有的 n，$D_n(\lambda)$ 都是既约的(例如 $n = 4$). 当 $D_n(\lambda)$ 既约时，可以用本章方法得到 n 个整数贯 $\phi_{n,d}(r)$ $(r = 1, 2, \cdots, n; d = 0, 1, \cdots)$，满足由 $D_n(\lambda)$ 构成的递推公式

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n - j + \left[\frac{1}{2}j\right]}{\left[\frac{1}{2}j\right]} (-1)^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}+j} \phi_{n,k+j}(r) = 0,$$

此处初始值分别取自方阵 $(\phi_{n,0}, \cdots, \phi_{n,n-1})$ 的行矢量，则得

$$(\phi_{n,d}(1), \cdots, \phi_{n,d}(n))' = \phi_{n,d}.$$

所以这种广义 Fibonacci 贯是可以用本章的较简单的方法得出来的. 由于当 $n \geqslant 5$ 时，$D_n(\lambda)$ 并非 PV 数的定义多项式，所以很难希望 $\frac{\phi_{n,d+1}(r)}{\phi_{n,d}(r)}$ 收敛于 $D_n(\lambda)$ 的绝对值最大的特征根 λ 的速度很快.

注　　释

§ 1. PV 数的定义首先是 Pisot, C.[1] 与 Vijayaraghavan, T.[1] 引进的(参看 Cassels, J. W. S.[1])，本节引入的定义 PV 数 ω 的渐近分数的方法即通常的 Jacobi-Perron 算法(参看 Bernstein, L.[1]).

§ § 1-5. 见华罗庚与王元[6,7,8]

§ 6. 参看华罗庚[5].

§ 7. 见谢庭藩与裴定一[1]，华罗庚与王元[7]

§ 8. 见华罗庚与王元[6,7].

第三章　一 致 分 布

§1. 一致分布

命 s 为一正整数及 G_s 表示 s 维空间的单位立方体

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \cdots, \quad 0 \leqslant x_s \leqslant 1. \tag{1}$$

命 n 为一正整数及

$$P_n(k) = (x_1^{(n)}(k), \cdots, x_s^{(n)}(k)), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{2}$$

表示 G_s 中的一个点集,此处

$$0 \leqslant x_i^{(n)}(k) < 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{3}$$

对于任意 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s) \in G_s$, 命 $N_n(\boldsymbol{\gamma}) = N_n(\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$ 表示 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 中适合诸不等式

$$0 \leqslant x_1^{(n)}(k) < \gamma_1, \cdots, \quad 0 \leqslant x_s^{(n)}(k) < \gamma_s \tag{4}$$

的个数. 若

$$\sup_{\gamma \in G_s} \left| \frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}| \right| = \varphi(n), \quad |\boldsymbol{\gamma}| = \gamma_1 \cdots \gamma_s, \tag{5}$$

则称点集 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 有偏差 $\varphi(n)$.

命 n_l 过一个整数贯

$$1 < n_1 < n_2 < \cdots, \tag{6}$$

对应于一个 n_l, 有一个 G_s 中的点集 $P_{n_l}(k)(1 \leqslant k \leqslant n_l)$, 且有偏差 $\varphi(n_l)$. 若 $\varphi(n_l) = o(1)$, 则称点集贯 $P_{n_l}(k)(n_1 < n_2 < \cdots)$ 为一致分布且有偏差 $\varphi(n)$.

特别当 $n_l = l$, $x_1^{(l)}(k) = x_1(k), \cdots, x_s^{(l)}(k) = x_s(k)(l = 1, 2, \cdots)$ 时,则称贯

$$P(k) = (x_1(k), \cdots, x_s(k)), \quad k = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

在 G_s 上一致分布且有偏差 $\varphi(n)$.

§ 2. 间断函数的光滑逼近法

引理 1. 命 r 为正整数，α, β 为实数及 Δ 满足

$$0 < \Delta < \frac{1}{2}, \quad \Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta,$$

则存在以 1 为周期的函数 $\Psi(x)$，满足以下条件：

1) $\Psi(x) = 1$，当 $\alpha + \frac{1}{2}\Delta \leqslant x \leqslant \beta - \frac{1}{2}\Delta$，

2) $0 \leqslant \Psi(x) \leqslant 1$，当 $\alpha - \frac{1}{2}\Delta \leqslant x \leqslant \alpha + \frac{1}{2}\Delta$ 及 $\beta - \frac{1}{2}\Delta \leqslant x \leqslant \beta + \frac{1}{2}\Delta$，

3) $\Psi(x) = 0$，当 $\beta + \frac{1}{2}\Delta \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - \frac{1}{2}\Delta$，

4) $\Psi(x)$ 有 Fourier 展开

$$\Psi(x) = \beta - \alpha + \sum{}' C(m) e^{2\pi i m x},$$

此处 $\sum'$ 表示在求和号 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$ 中去 $m = 0$ 一项，而

$$|C(m)| \leqslant \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \left(\frac{1}{\pi|m|}\right)^{r+1}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^{r}\right).$$

证. 定义以 1 为周期的函数

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} 1, & 当 \alpha < x < \beta, \\ \frac{1}{2}, & 当 x = \alpha 与 x = \beta, \\ 0, & 当 \beta < x < 1 + \alpha, \end{cases}$$

则 $\Psi_0(x)$ 有 Fourier 展开

$$\Psi_0(x) = C_0^{(0)} + \sum{}' C_m^{(0)} e^{2\pi i m x},$$

此处

$$C_0^{(0)} = \int_0^1 \Psi_0(x) dx = \beta - \alpha,$$

$$C_m^{(0)} = \int_0^1 \Psi_0(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_\alpha^\beta e^{-2\pi i m x}\, dx = \frac{e^{-2\pi i m \alpha} - e^{-2\pi i m \beta}}{2\pi i m},$$

所以

$$|C_m^{(0)}| \leqslant \min\left(\beta - \alpha,\ \frac{1}{\pi|m|}\right).$$

命 $\Delta = 2r\delta$，当 $\rho = 1, 2, \cdots, r$ 时，用归纳法定义

$$\Psi_\rho(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \Psi_{\rho-1}(x+z)dz,$$

我们可以用归纳法证明

1) $\Psi_\rho(x) = 1,\qquad$ 当 $\alpha + \rho\delta < x < \beta - \rho\delta$，

2) $0 \leqslant \Psi_\rho(x) \leqslant 1,\quad$ 当 $\alpha - \rho\delta \leqslant x \leqslant \alpha + \rho\delta$ 及 $\beta - \rho\delta \leqslant x \leqslant \beta + \rho\delta$，

3) $\Psi_\rho(x) = 0,\qquad$ 当 $\beta + \rho\delta < x < 1 + \alpha - \rho\delta$，

4) $\Psi_\rho(x)$ 有 Fourier 展开

$$\Psi_\rho(x) = C_0^{(\rho)} + \Sigma' C_m^{(\rho)} e^{2\pi imx},$$

此处

$$C_0^{(\rho)} = \beta - \alpha,$$

$$|C_m^{(\rho)}| \leqslant \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \left(\frac{1}{\pi|m|}\right)^{\rho+1}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^{\rho}\right).$$

事实上，假定 $\Psi_{\rho-1}(x)$ 适合 1)—4)，则显然 $\Psi_\rho(x)$ 适合 1)—3)，下面证明 $\Psi_\rho(x)$ 适合 4)．

$$C_0^{(\rho)} = \int_0^1 \Psi_\rho(x)dx = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} dz \int_0^1 \Psi_{\rho-1}(x+z)dx$$

$$= C_0^{(\rho-1)} = \beta - \alpha,$$

$$C_m^{(\rho)} = \int_0^1 \Psi_\rho(x) e^{-2\pi imx}dx = \frac{1}{2\delta}\int_0^1 e^{-2\pi imx}dx \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_{\rho-1}(x+z)dz$$

$$= \frac{C_m^{(\rho-1)}}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} e^{2\pi imz}dz$$

$$= C_m^{(\rho-1)}\left(\frac{e^{2\pi im\delta} - e^{-2\pi im\delta}}{4\pi im\delta}\right)$$

$$= C_m^{(0)}\left(\frac{e^{2\pi im\delta} - e^{-2\pi im\delta}}{4\pi im\delta}\right)^{\rho},$$

因此

$$|C_m^{(\rho)}| \leqslant \min\left(\beta-\alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \left(\frac{1}{\pi|m|}\right)^{\rho+1}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^{\rho}\right),$$

取 $\Psi(x)=\Psi_r(x)$，则得引理.

§3. 指数和与偏差估计

引入记号 $\bar{x}=\max(1, |x|)$，$\|\boldsymbol{\gamma}\|=\bar{\gamma}_1\cdots\bar{\gamma}_s$ 与 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\beta_i$ 表示矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内乘积.

定理 1. 命 r 为正整数及 h 为正整数 $>\frac{r}{\eta}$，此处 η 适合于 $0<\eta<\frac{1}{6}$，则对于任何 $\boldsymbol{\gamma}\in G_s$ 皆有

$$\left|\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma})-|\boldsymbol{\gamma}|\right|<\varphi(n), \tag{1}$$

此处

$$\varphi(n)=\sum_{|m_i|\leqslant h}{}' \frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},P_n(k))}\right|+(5s+6)\eta$$
$$+\frac{s2^s r^{r-1}}{\pi^{s+r}\eta^r h^r}(\log 64h)^{s-1}, \tag{2}$$

其中 $\sum'$ 表示在求和号中去掉 $\mathbf{m}=\mathbf{0}=(0, \cdots, 0)$ 一项.

证明之前先证下面的引理.

引理 1. 当 n 及 l 为整数 >1 时有

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}<1+\log n \tag{3}$$

与

$$\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^l}>\frac{1}{l-1}n^{-l+1}. \tag{4}$$

证. 由于

$$\frac{1}{m}<\int_{m-1}^{m}\frac{dt}{t},$$

所以

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}<1+\int_{1}^{2}\frac{dt}{t}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t}=1+\int_{1}^{n}\frac{dt}{t}$$

$$=1+\log n,$$

故得(3)式. 又易知

$$\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{l}}>\int_{n}^{\infty}\frac{dt}{t^{l}}=\frac{n^{-l+1}}{l-1},$$

引理证完.

定理 1 的证明. 1) 命 $\boldsymbol{\gamma}\in G_s$, 此处 γ_i 适合于

$$3\eta\leqslant\gamma_i\leqslant 1-3\eta,\quad 1\leqslant i\leqslant s.$$

引入函数

$$G_x(y)=\begin{cases}1, & 当\ 0\leqslant y<x,\\ 0, & 当\ x\leqslant y<1,\end{cases}\tag{5}$$

则得

$$\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{x_\nu^{(n)}(k)<\gamma_\nu\\ 1\leqslant\nu\leqslant s}}1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{s}G_{\gamma_\nu}(x_\nu^{(n)}(k)).\tag{6}$$

当 $3\eta\leqslant x\leqslant 1-3\eta$ 时,按引理 2.1 构造两个辅助函数 $G_x^{(1)}(y)$ 与 $G_x^{(2)}(y)$, $G_x^{(1)}(y)$ 满足

1) $G_x^{(1)}(y)=1,\qquad$ 当 $-\eta\leqslant y\leqslant x$,

2) $0\leqslant G_x^{(1)}(y)\leqslant 1,\quad$ 当 $-2\eta\leqslant y\leqslant-\eta$ 及 $x\leqslant y\leqslant x+\eta$,

3) $G_x^{(1)}(y)=0,\qquad$ 当 $x+\eta\leqslant y\leqslant 1-2\eta$,

4) $G_x^{(1)}(y)$ 有 Fourier 展开

$$G_x^{(1)}(y)=x+2\eta+\Sigma' C_1(m)e^{2\pi imy},$$

其中

$$|C_1(m)|\leqslant\min\left(x+2\eta,\ \frac{1}{\pi|m|},\frac{r^r}{\pi^{r+1}\eta^r|m|^{r+1}}\right).$$

$G_x^{(2)}(y)$ 满足

1)′ $G_x^{(2)}(y)=1,\qquad$ 当 $2\eta\leqslant y\leqslant x-\eta$,

2)′ $0\leqslant G_x^{(2)}(y)\leqslant 1,\quad$ 当 $\eta\leqslant y\leqslant 2\eta$ 及 $x-\eta\leqslant y\leqslant x$,

3)′ $G_x^{(2)}(y)=0$, 当 $x\leqslant y\leqslant 1+\eta$,

4)′ $G_x^{(2)}(y)$ 有 Fourier 展开

$$G_x^{(2)}(y)=x-2\eta+\Sigma' C_2(m)e^{2\pi imy}.$$

其中

$$|C_2(m)|\leqslant \min\left(x-2\eta,\ \frac{1}{\pi|m|},\ \frac{r^r}{\pi^{r+1}\eta^r|m|^{r+1}}\right),$$

则得

$$G_x^{(2)}(y)\leqslant G_x(y)\leqslant G_x^{(1)}(y). \tag{7}$$

由 4) 及引理 1 可知

$$\begin{aligned}G_x^{(1)}(y)&=\sum_{|m|\leqslant h}C_1(m)e^{2\pi imy}+\vartheta\sum_{|m|>h}\frac{r^r}{\pi^{r+1}\eta^r|m|^{r+1}}\\&=\sum_{|m|\leqslant h}C_1(m)e^{2\pi imy}+\frac{2\vartheta r^{r-1}}{\pi^{r+1}\eta^r h^r},\end{aligned} \tag{8}$$

此处及以后 ϑ 皆表示适合于 $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$ 的数,但不一定都相等,而 $C_1(0)=x+2\eta$, 故由 (6), (7), (8) 可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma})&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\gamma=1}^{s}G_{\gamma_\nu}^{(1)}(x_\nu^{(n)}(k))\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\gamma=1}^{s}\left(\sum_{|m|\leqslant h}C_1(m)e^{2\pi imx_\nu^{(n)}(k)}+\frac{2\vartheta r^{r-1}}{\pi^{r+1}\eta^r h^r}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

由引理 1 可知

$$\begin{aligned}1+\sum_{|m|\leqslant h}|C_1(m)|&\leqslant 2+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{h}\frac{1}{m}\\&\leqslant 2+\frac{2}{\pi}\log h+\frac{2}{\pi}<\frac{2}{\pi}\log 64h.\end{aligned} \tag{10}$$

又易知

$$\begin{aligned}(\gamma_1+2\eta)\cdots(\gamma_s+2\eta)&\leqslant\gamma_1(\gamma_2+2\eta)\cdots(\gamma_s+2\eta)\\&+2\eta\leqslant\cdots\leqslant|\boldsymbol{\gamma}|+2s\eta,\end{aligned} \tag{11}$$

所以由 (9), (10), (11) 可知

$$\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma})-|\boldsymbol{\gamma}|\leqslant\sum_{|m_i|\leqslant h}{}' C_1(m_1)\cdots C_1(m_s)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},P_n(k))}$$

$$+ 2s\eta + \frac{2sr^{r-1}}{\pi^{r+1}\eta^r h^r}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s-1}(\log 64h)^{s-1}. \tag{12}$$

用 $G_x^{(2)}(y)$ 代替 $G_x^{(1)}(y)$，则可得 $\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma}) - |\boldsymbol{\gamma}|$ 一个类似的下界估计，所以

$$\left|\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma}) - |\boldsymbol{\gamma}|\right| \leqslant \sum_{|m_i|\leqslant h}{}' \frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i(\mathbf{m},P_n(k))}\right|$$

$$+ 2s\eta + \frac{s2^s r^{r-1}}{\pi^{r+s}\eta^r h^r}(\log 64h)^{s-1} = \Phi\ (定义). \tag{13}$$

2）若 $\boldsymbol{\gamma}$ 的分量中有 $t(\geqslant 1)$ 个适合于 $\gamma_i < 3\eta$，而其余的皆适合于 $3\eta \leqslant \gamma_i \leqslant 1 - 3\eta$，则定义 $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1', \cdots, \gamma_s')$，此处当 $\gamma_i < 3\eta$ 时，$\gamma_i' = 3\eta$，否则 $\gamma_i' = \gamma_i$，则 $N_n(\boldsymbol{\gamma}') \geqslant N_n(\boldsymbol{\gamma})$. 所以由 1）可知

$$\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right| \leqslant \left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma}')}{n}\right| + |\boldsymbol{\gamma}| \leqslant \left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma}')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}'|\right|$$

$$+ |\boldsymbol{\gamma}'| + |\boldsymbol{\gamma}| \leqslant \Phi + 6\eta. \tag{14}$$

3）显然当 $\boldsymbol{\gamma}$ 的分量中有 t 个等于 1 而其余皆不超过 $1 - 3\eta$ 时，则问题化为 $s - t$ 维的问题，故(14)仍成立. 对于任意 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$，命 $\boldsymbol{\gamma}'$ 与 $\boldsymbol{\gamma}''$ 为分别将 $\boldsymbol{\gamma}$ 中适合 $\gamma_i > 1 - 3\eta$ 之 γ_i 换为 $1-3\eta$ 与 1，而其余分量皆不变所得来之矢量，则

$$\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma}')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma}'')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right|\right) \leqslant \Phi + 6\eta + 3s\eta,$$

故得定理.

§4. 同余式的解数估计

本节将证明

引理 1. 命 $M \geqslant 1$，假定同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \equiv 0 \pmod n \tag{1}$$

在区域

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant M, \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

中无解，则(1)在区域

$$\|\mathbf{m}\| < lM \tag{3}$$

中的解数 T_M^l 适合于

$$T_M^l \leqslant c(\varepsilon)^s l^{1+\varepsilon} M^\varepsilon, \tag{4}$$

此处 l 为整数 $\geqslant 1$，而 ε (及以后)皆表示任意给定的正数.

我们用 P_M^s 表示边平行于座标轴，体积不超过M的 s 维平行多面体. 定理 1 的证明依赖于次之格点覆盖定理.

引理 2. 命 l 为整数 $\geqslant 1$，则 s 维区域(3)可以被不超过 $c(\varepsilon)^s l^{1+\varepsilon} M^\varepsilon$ 个 P_M^s 型的平行多面体所覆盖.

证. 取

$$c(\varepsilon) = 2^{2+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} (j^{-(1+\varepsilon)} + 2^{-\varepsilon j}).$$

1) 对于 $s=1$，因区域(3)就是开区间$(-lM, lM)$，所以它可以被不超过

$$\frac{2lM}{M} = 2l$$

个型为$[c, c+M]$的区间所覆盖，此处 c 为常数. 所以引理 1 对于 $s=1$ 成立.

2) 假定 k 为正整数及引理对于 $s=1, 2, \cdots, k$ 成立，下面证明定理对于 $s=k+1$ 亦成立.

用超平面

$$m_{k+1} = 0, \quad \pm 2^i l, \quad i = 0, 1, \cdots, [\log_2 M]$$

将区域

$$\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_{k+1} < lM \tag{5}$$

分为 $2[\log_2 M] + 3$ 片.

(i) $m_{k+1} = j, \quad |j| \leqslant l,$

(ii) $2^i l < |m_{k+1}| \leqslant 2^{i+1} l, \quad i = 0, 1, \cdots, [\log_2 M].$

3) 假定 $m_{k+1} = j$，则

$$\bar{m}_1\cdots\bar{m}_k < \frac{lM}{j} < \left(\left[\frac{l}{j}\right]+1\right)M,$$

故由归纳法假定可知，上面的 k 维区域可以被不超过

$$Q = c(\varepsilon)^k\left(\left[\frac{l}{j}\right]+1\right)^{1+\varepsilon}M^{\varepsilon}$$

个 P_M^k 型的平行多面体所覆盖．以这些 P_M^k 为底，以 1 为高，作 P_M^{k+1}，则子区域 $m_{k+1}=j$ 可以被不超过 Q 个 P_M^{k+1} 型的平行多面体所覆盖，因此由 (i) 定义的一片区域可以被不超过

$$2\sum_{j=0}^{l} c(\varepsilon)^k\left(\left[\frac{l}{j}\right]+1\right)^{1+\varepsilon}M^{\varepsilon} \tag{6}$$

个 P_M^{k+1} 型的平行多面体所覆盖．

4）考虑(3)的子区域

$$2^i l < m_{k+1} \leqslant 2^{i+1}l, \tag{7}$$

则当 $m_{k+1}=2^il+1$ 时有

$$\bar{m}_1\cdots\bar{m}_k < \frac{M}{2^i},$$

故由归纳法假定可知上面区域可以被不超过

$$c(\varepsilon)^k\left(\frac{M}{2^i}\right)^{\varepsilon} \tag{8}$$

个 $P_{M/2^i}^k$ 型的平行多面体所覆盖．以 $P_{M/2^i}^k$ 为底，以 2^i 为高，作多面体 P_M^{k+1}，因 $2^il+2^il+1>2^{i+1}l$，所以区域(7)可以被不超过 $c(\varepsilon)^kl\left(\frac{M}{2^i}\right)^{\varepsilon}$ 个 P_M^{k+1} 型的平行多面体所覆盖．因此由 (ii) 定义的区域可以被不超过

$$2c(\varepsilon)^kl\sum_{i=0}^{[\log_2 M]}\left(\frac{M}{2^i}\right)^{\varepsilon} \tag{9}$$

个 P_M^{k+1} 型的平行多面体所覆盖．

5）由 (6), (9) 可知，区域 (3) 可以被不超过

$$c(\varepsilon)^kl^{1+\varepsilon}M^{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2^{2+\varepsilon}}{j^{1+\varepsilon}}+\frac{2}{2^{\varepsilon i}}\right) \leqslant c(\varepsilon)^{k+1}l^{1+\varepsilon}M^{\varepsilon}$$

个 P_M^{k+1} 型的平行多面体所覆盖，故由归纳法即得引理．

引理 1 的证明. 由引理 2 可知，只要证明同余式 (1) 在任何 P_M^s 型的平行多面体中最多只有一个解即可. 假定同余式(1)在某 P_M^s 中有两个解 $\mathbf{m}'$ 与 $\mathbf{m}''$, 此处 $\mathbf{m}' \neq \mathbf{m}''$. 命 $\mathbf{m} = \mathbf{m}' - \mathbf{m}''$, 则 $\|\mathbf{m}\| \leqslant M$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 及

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = (\mathbf{a}, \mathbf{m}') - (\mathbf{a}, \mathbf{m}'') \equiv 0 \pmod n,$$

故得矛盾. 引理证完.

引理 3. 在定理 1 的假定下有

$$T_M^l \leqslant c(s) l (\log 3lM)^{s-1}.$$

证. 不难用归纳法证明在引理 2 中将 $c(\varepsilon)^s l^{1+\varepsilon} M^\varepsilon$ 换为 $c(\varepsilon) l (\log 3lM)^{s-1}$ 仍成立. 故得引理.

§5. 同余式的解与偏差估计

本节将证明

定理 1. 假定同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod n \tag{1}$$

在区域

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant M, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

中无解，此处 $M \geqslant 1$, 则点集

$$\left(\left\{\frac{a_1 k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{3}$$

有偏差

$$\varphi(n) \leqslant c(s) M^{-1} (\log 3M)^s \tag{4}$$

引理 1. 命 m, n 为正整数，则

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i m k}{n}} = \begin{cases} n, & \text{当 } n \mid m, \\ 0, & \text{当 } n \nmid m. \end{cases}$$

证明见华罗庚 [1] 第七章.

定理 1 的证明. 命 $h \geqslant 7$. 由引理 1 及引理 4.3 可知

$$\sum_{|m_i| \leqslant h}{}' \frac{1}{\|\pi \mathbf{m}\|} \left| \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i (\mathbf{a}, \mathbf{m}) k}{h}} \right|$$

$$= \sum_{\substack{|m_i| \leqslant h \\ (\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod n}}{}' \frac{1}{\|\pi \mathbf{m}\|} \leqslant \sum_{l=1}^{h^s} \frac{(T_M^{l+1} - T_M^l)}{lM}$$

$$= M^{-1}\sum_{l=1}^{h^s} T_M^{l+1}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) + \frac{T_M^{h^s+1}}{(h^s+1)M}$$

$$\leqslant c(s)M^{-1}\sum_{l=1}^{h^s}\frac{(\log 3lM)^{s-1}}{l} + (\log hM)^{s-1})$$

$$\leqslant c(s)M^{-1}(\log hM)^s.$$

在定理 3.1 中置 $r=1, \eta=\frac{1}{7M}$ 及 $h=7([M]+1)^2$，即得定理.

§6. 分部求和公式

引理 1. 命 $g(\mathbf{m})$ 表示 $\mathbf{m}$ 的非负函数，则

$$\sum_{|m|_i\leqslant h}{}' \frac{g(\mathbf{m})}{\|\mathbf{m}\|} \leqslant \sum_{l=0}^{s}\sum_{i}\frac{1}{h^l}\sum_{m_{i_{l+1}}=1}^{h}\cdots\sum_{m_{i_s}=1}^{h}\frac{1}{m_{i_{l+1}}^2\cdots m_{i_s}^2}$$

$$\times \sum_{|k_{i_1}|\leqslant h+1}\cdots\sum_{|k_{i_l}|\leqslant h+1}\sum_{|k_{i_{l+1}}|\leqslant m_{i_{l+1}}}\cdots\sum_{|k_{i_s}|\leqslant m_{i_s}}{}' g(\mathbf{k}),$$

此处 $\sum_{\mathbf{i}}$ 表示通过 $(1,\cdots,s)$ 所有的置换 $\mathbf{i}=((i_1,\cdots,i_s)$ 求和.

证. 由于

$$\sum_{|m|\leqslant h}\frac{g(m)}{m} = g(0) + \sum_{m=1}^{h}\frac{1}{m}(g(m)+g(-m))$$

$$= g(0) + \sum_{m=1}^{h}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\sum_{1\leqslant k\leqslant m}(g(k)+g(-k))$$

$$+ \frac{1}{h+1}\sum_{|k|\leqslant h+1}{}' g(k) \leqslant \sum_{m=1}^{h}\frac{1}{m^2}\sum_{|k|\leqslant m} g(k)$$

$$+ \frac{1}{h}\sum_{|k|\leqslant h+1} g(k),$$

所以

$$\sum_{|m_i|\leqslant h}{}' \frac{g(\mathbf{m})}{\|\mathbf{m}\|} \leqslant \sum_{|m_i|\leqslant h}{}' \frac{1}{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_{s-1}}\left(\sum_{m_s=1}^{h}\frac{1}{m_s^2}\sum_{|k_s|\leqslant m_s} g(m_1,\cdots,\right.$$

$$m_{s-1}, k_s) + \frac{1}{h} \sum_{|k_s| \leqslant h+1} g(m_1, \cdots, m_{s-1}, k_s) \Big)$$

$$+ \sum_{|m_i| \leqslant h} \frac{1}{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{s-1}} \Big(\sum_{m_s=1}^{h} \frac{1}{m_s^2} \sum_{|k_s| \leqslant m_s}{}' g(m_1, \cdots, m_{s-1}, k_s)$$

$$+ \frac{1}{h} \sum_{|k_s| \leqslant h+1}{}' g(m_1, \cdots, m_{s-1}, k_s) \Big) \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{s} \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{h^l} \sum_{m_{i_{l+1}}=1}^{h} \cdots \sum_{m_{i_s}=1}^{h} \frac{1}{m_{i_{l+1}}^2 \cdots m_{i_s}^2}$$

$$\times \sum_{|k_{i_1}| \leqslant h+1} \cdots \sum_{|k_{i_l}| \leqslant h+1} \sum_{|k_{i_{l+1}}| \leqslant m_{i_{l+1}}} \cdots \sum_{|k_{i_s}| \leqslant m_{i_s}}{}' g(\mathbf{k}).$$

引理证完.

§7. 偏差比较

引理 1. 假定点集 $P_n(k) = (x_1^{(n)}(k), \cdots, x_s^{(n)}(k))(1 \leqslant k \leqslant n)$ 与点集 $Q_n(k) = (y_1^{(n)}(k), \cdots, y_s^{(n)}(k))(1 \leqslant k \leqslant n)$ 分别有偏差 $\varphi(n)$ 与 $\psi(n)$，且

$$|x_i^{(n)}(k) - y_i^{(n)}(k)| \leqslant \delta,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{1}$$

则

$$|\varphi(n) - \psi(n)| \leqslant s\delta. \tag{2}$$

证. 对于 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$, 定义 $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1', \cdots, \gamma_s')$ 与 $\boldsymbol{\gamma}'' = (\gamma_1'', \cdots, \gamma_s'')$,此处

$$\gamma_i' = \begin{cases} \gamma_i - \delta, & \text{当 } \gamma_i - \delta \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } \gamma_i - \delta < 0, \end{cases}$$
$$\gamma_i'' = \begin{cases} \gamma_i + \delta, & \text{当 } \gamma_i + \delta \leqslant 1, \\ 1, & \text{当 } \gamma_i + \delta > 1,\ 1 \leqslant i \leqslant s. \end{cases} \tag{3}$$

命 $N_n(\boldsymbol{\gamma})$ 与 $M_n(\boldsymbol{\gamma})$ 分别表示 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 与 $Q_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 中落入 s 维矩形

$$0 \leqslant x_1 < \gamma_1, \cdots, 0 \leqslant x_s < \gamma_s \tag{4}$$

中之个数,则由(1)可知

$$M_n(\boldsymbol{\gamma}') \leqslant N_n(\boldsymbol{\gamma}) \leqslant M_n(\boldsymbol{\gamma}''). \tag{5}$$

又记

$$\sigma_1 = \left|\frac{M_n(\boldsymbol{\gamma}')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right|, \quad \sigma_2 = \left|\frac{M_n(\boldsymbol{\gamma}'')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right|, \tag{6}$$

则由(5)可知

$$\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right| \leqslant \max(\sigma_1, \sigma_2). \tag{7}$$

由于

$$0 \leqslant |\boldsymbol{\gamma}''| - |\boldsymbol{\gamma}| \leqslant \delta + \gamma_1\left(\prod_{i=2}^{s} \gamma_i'' - \prod_{i=2}^{s} \gamma_i\right) \leqslant \cdots \leqslant s\delta_1,$$

所以

$$\sigma_2 \leqslant \left|\frac{M_n(\boldsymbol{\gamma}'')}{n} - |\boldsymbol{\gamma}''|\right| + |\boldsymbol{\gamma}''| - |\boldsymbol{\gamma}| \leqslant \psi(n) + s\delta. \tag{8}$$

同理可知 σ_1 亦满足同样的不等式,故由(7)可知

$$\varphi(n) \leqslant \psi(n) + s\delta. \tag{9}$$

类似地可以证明

$$\psi(n) \leqslant \varphi(n) + s\delta. \tag{10}$$

引理证完.

§ 8. 有理逼近与同余式的解

我们用 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ 及 $\mathbf{m}^{(0)} = (m_0, m_1, \cdots, m_s)$ 表示整矢量, 其中 $h_0 = 1$, 又记 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_s)$. 本节将证明

引理 1. 假定对于任何 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 皆有

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle \geqslant b\|\mathbf{m}\|^{-a}, \tag{1}$$

此处 a, b 为适合于 $s \geqslant a \geqslant 1$ 及 $b > 0$ 之常数,又假定

$$\left|\frac{h_i}{n} - \gamma_i\right| \leqslant dn^{-1-g}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{2}$$

此处 d 为正常数,而 g 适合于 $0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{s}$, 则存在正常数 $c(b, d, s)(<1)$ 使同余式

$$(\mathbf{h}, \mathbf{m}^{(0)}) = \sum_{i=0}^{s} h_i m_i \equiv 0 (\bmod n) \tag{3}$$

在区域

$$\|\mathbf{m}^{(0)}\| \leqslant c(b, d, s) n^{\frac{1+g}{1+a}}, \quad \mathbf{m}^{(0)} \neq \mathbf{0} \tag{4}$$

中无解.

证. 命 $\mathbf{m}^{(0)} \neq \mathbf{0}$ 为同余式(3)的解，若 $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, 则 $m_0 \neq 0$. 由(3)可知 $m_0 \equiv 0(\bmod n)$, 所以 $\|\mathbf{m}^{(0)}\| \geqslant n$, 从而 $\mathbf{m}^{(0)}$ 不属于区域(4), 因此可以假定 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. 若

$$\|\mathbf{m}\| \geqslant \left(\frac{b}{2ds}\right)^{\frac{1}{1+a}} n^{\frac{1+g}{1+a}},$$

则

$$\|\mathbf{m}^{(0)}\| \geqslant \left(\frac{b}{2ds}\right)^{\frac{1}{1+a}} n^{\frac{1+g}{1+a}},$$

故得定理. 现在假定

$$\|\mathbf{m}\| < \left(\frac{b}{2ds}\right)^{\frac{1}{1+a}} n^{\frac{1+g}{1+a}},$$

因

$$\langle \alpha - \beta \rangle \geqslant \langle \alpha \rangle - \langle \beta \rangle,$$

所以由(1),(2)得

$$\frac{|m_0|}{n} \geqslant \left\langle \frac{m_0}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} h_i m_i \right\rangle \geqslant \langle (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m}) \rangle$$

$$- \left\langle \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{h_i}{n} - \gamma_i\right) m_i \right\rangle \geqslant \frac{b}{\|\mathbf{m}\|^a} - \frac{ds}{n^{1+g}} \|\mathbf{m}\|.$$

从而

$$\|\mathbf{m}^{(0)}\| \geqslant \frac{nb}{\|\mathbf{m}\|^{a-1}} - \frac{ds}{n^g} \|\mathbf{m}\|^2 \geqslant b^{\frac{2}{1+a}} (2ds)^{\frac{-1+a}{1+a}} n^{1+\frac{(1-a)(1+g)}{1+a}}$$

$$- \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{1+a}} (ds)^{\frac{-1+a}{1+a}} n^{\frac{2(1+g)}{1+a}-1-g} \geqslant \frac{1}{2} (2ds)^{\frac{-1+a}{1+a}} b^{\frac{2}{1+a}} n^{\frac{1+g}{1+a}}.$$

引理证完.

§ 9. 有理逼近与偏差估计

本节将证明下列三个定理.

定理 1. 假定对于任何整矢量 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 皆有

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle \geqslant b\|\mathbf{m}\|^{-a}, \tag{1}$$

此处 a, b 为适合于 $1 \leqslant a \leqslant 1+\frac{1}{2s}$ 及 $b>0$ 之常数,则点集

$$P_n(k)=(\{\gamma_1 k\}, \cdots, \{\gamma_s k\}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{2}$$

有偏差

$$\varphi(n)=c(b, s) n^{-1+2s(a-1)}(\log 3n)^{1+s\delta_{1,a}}, \tag{3}$$

其中 $\delta_{\alpha,\beta}$ 表示 Kronecker 符号.

定理 2. 在定理 1 的假定下,又若

$$\left|\frac{h_i}{n}-\gamma_i\right| \leqslant d n^{-1-g}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{4}$$

此处 d 为正常数,而 g 适合于 $0 \leqslant g \leqslant \frac{1}{s}$,则点集

$$\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}, \left\{\frac{h_1 k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{h_s k}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{5}$$

有偏差

$$\varphi(n)=c(b, d, s) n^{-\frac{1+g}{1+a}}(\log 3n)^{s+1}. \tag{6}$$

定理 3. 在定理 2 的假定下,又若整数 q 适合于 $1 \leqslant q \leqslant n^{\frac{1+g}{2-2s(a-1)}}$,则点集

$$\left(\left\{\frac{h_1 k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{h_s k}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant q \tag{7}$$

有偏差

$$\varphi(q)=c(b, d, s) q^{-1+2s(a-1)}(\log 3q)^{1+s\delta_{1,a}}. \tag{8}$$

证明之前先证下列诸引理.

引理 1. 命 δ 为任意实数,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \delta k}\right| \leqslant \min\left(n, \frac{1}{2\langle\delta\rangle}\right).$$

证明见华罗庚[1]，第七章.

引理 2. 有下列不等式

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\alpha}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{当 } 0\leqslant\alpha<1,\\ \dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{当 } \alpha<0.\end{cases}$$

证. 当 $0\leqslant\alpha<1$ 时，

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\alpha}}\leqslant 1+\int_{1}^{n}\frac{dt}{t^{\alpha}}=1+\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\leqslant\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

另一关系式的证明是类似的. 引理证完.

引理 3. 命 $Q=[2^{s\alpha}\|\mathbf{m}\|^{\alpha}b^{-1}]+1$，此处 $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$，则在定理 1 的假定下，在任何区间 $(P, P+Q^{-1}]$ 中皆最多只包含一个点 $(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma})=\sum_{i=1}^{s}k_i\gamma_i$，此处 $\mathbf{k}$ 为整矢量，其分量 k_i 适合于 $|k_i|\leqslant|m_i|\ (1\leqslant i\leqslant s)$.

证. 若在区间 $(P, P+Q^{-1}]$ 中包含两个点 $(\mathbf{k}',\boldsymbol{\gamma})$ 与 $(\mathbf{k}'',\boldsymbol{\gamma})$，此处 $\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}''$，$|k_i'|\leqslant|m_i|$ 及 $|k_i''|\leqslant|m_i|\ (1\leqslant i\leqslant s)$，则

$$\langle(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'',\boldsymbol{\gamma})\rangle\leqslant Q^{-1}.$$

另一方面，由(1)式可得

$$\langle(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'',\boldsymbol{\gamma})\rangle>b\|\mathbf{k}'-\mathbf{k}''\|^{-\alpha}\geqslant 2^{-s\alpha}b\|\mathbf{m}\|^{-\alpha}>Q^{-1},$$

故得矛盾. 引理证完

引理 4. 在引理 3 的假定下有

$$\sideset{}{'}\sum_{|k_i|\leqslant|m_i|}\frac{1}{\langle(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma})\rangle}\leqslant 4Q\log 3Q.$$

证. 将区间 $(0,1]$ 分成 Q 个子区间

$$I_l=\left(\frac{l}{Q},\frac{l+1}{Q}\right],\quad l=0,1,\cdots,Q-1.$$

I_0 中不能包含点 $(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma})$，此处 $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$ 及 $|k_i|\leqslant|m_i|\ (1\leqslant i\leqslant s)$，否则由(1)得

$$Q^{-1}\geqslant\langle(\mathbf{k},\boldsymbol{\gamma})\rangle\geqslant b\|\mathbf{k}\|^{-\alpha}\geqslant b\|\mathbf{m}\|^{-\alpha}>Q^{-1},$$

此为矛盾. 又由引理 3 可知在任何 I_l 中最多只包含一个点 $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})$, 此处 $l \geqslant 1$, 因此

$$\sum_{|k_i| \leqslant |m_i|} \frac{1}{\langle(\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{Q-1} \frac{Q}{k} < 4Q(1 + \log Q) < 4Q \log 3Q.$$

引理证完.

引理 5. 命 h 为整数 $\geqslant 2$, 则在定理 1 的假定下有

$$\sum_{|m_i| \leqslant h}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\| \langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \leqslant c(b, s) h^{s(a-1)} (\log h)^{1+s\delta_{1,a}}.$$

证. 由引理 2, 4 与引理 6.1 得

$$\sum_{|m_i| \leqslant h}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\| \langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \leqslant \sum_{l=0}^{s} \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{h^l} \sum_{m_{i_{l+1}}=1}^{h} \cdots \sum_{m_{i_s}=1}^{h} \frac{1}{m_{i_{l+1}}^2 \cdots m_{i_s}^2}$$

$$\times \sum_{|k_{i_1}| \leqslant h+1} \cdots \sum_{|k_{i_l}| \leqslant h+1} \sum_{|k_{i_{l+1}}| \leqslant m_{i_{l+1}}} \cdots \sum_{|k_{i_s}| \leqslant m_{i_s}}' \frac{1}{\langle(\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})\rangle}$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{s} \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{h^l} \sum_{m_{i_{l+1}}=1}^{h} \cdots \sum_{m_{i_s}=1}^{h} \frac{1}{m_{i_{l+1}}^2 \cdots m_{i_s}^2} c(b, s) h^{la} (m_{i_{l+1}} \cdots m_{i_s})^a \log h \leqslant c(b, s) h^{s(a-1)} (\log h)^{1+s\delta_{1,a}}.$$

引理证完.

定理 1 的证明. 由引理 1 与引理 5 得

$$\sum_{|m_i| \leqslant h}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i (\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) k} \right| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{|m_i| \leqslant h}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\| \langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle}$$
$$\leqslant c(b, s) n^{-1} h^{s(a-1)} (\log h)^{1+s\delta_{1,a}}.$$

在定理 3.1 中取 $r = 1$, $\eta = \frac{1}{7n}$ 与 $h = 8n^2$ 即得定理.

定理 3 的证明. 由定理 1 可知点集

$$(\{\gamma_1 k\}, \cdots, \{\gamma_s k\}), \quad 1 \leqslant k \leqslant q$$

有偏差 $c(b, s) q^{-1+2s(a-1)} (\log 3q)^{1+s\delta_{1,a}}$, 故由(4)及引理 7.1 可知点集(7)有偏差

$$\varphi(q) = c(b, s) q^{-1+2s(a-1)} (\log 3q)^{1+s\delta_{1,a}} + sdqn^{-1-g}$$
$$\leqslant c(b, d, s) q^{-1+2s(a-1)} (\log 3q)^{1+s\delta_{1,a}}.$$

定理 3 证完.

又由定理 5.1 及引理 8.1 即得定理 2.

§10. 偏差的下界估计

定理 1. 假定 $s \geqslant 2$，则对于任意点集 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 皆有

$$\varphi(n) > 2^{-2s-4}(s-1)^{-\frac{s-1}{2}} n^{-1}(\log_2 n)^{\frac{s-1}{2}}. \tag{1}$$

定理 1 显然是下面定理的推论.

定理 2. 假定 $s \geqslant 2$，则对于任意点集 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 皆有

$$\int_{G_s} (N_n(\mathbf{x}) - n|\mathbf{x}|)^2 d\mathbf{x} \geqslant 2^{-4s-8}(s-1)^{-(s-1)}(\log_2 n)^{s-1}. \tag{2}$$

我们假定 $s = 2$. 当 $s > 2$ 时，证明是完全类似的. 记

$$P_n(k) = (X_k, Y_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3}$$

任何满足 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 之 x 都可以唯一地表示为无穷级数

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots, \quad x_i = 0 \text{ 或 } 1.$$

命

$$\tau_r(x) = (-1)^{x_r}, \quad r = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

命 $m > 2$ 为一个待定整数，当 $(x, y) \in G_2$ 时，定义函数 $F_r(x, y)$ $(r = 1, 2, \cdots, m-1)$ 如下：若至少有一个 $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使

$$\begin{aligned} &x_1(X_k) = x_1(x), \cdots, x_{r-1}(X_k) = x_{r-1}(x), \\ &y_1(Y_k) = y_1(y), \cdots, y_{m-r-1}(Y_k) = y_{m-r-1}(y) \end{aligned} \tag{5}$$

成立，则定义 $F_r(x, y) = 0$，否则定义

$$F_r(x, y) = \tau_r(x)\tau_{m-r}(y). \tag{6}$$

引理 1. 假定 u 为非负整数，则

$$\int_{u2^{-r+1}}^{(u+1)2^{-r+1}} F_r(x, y)dx = 0 \tag{7}$$

与

$$\int_{u2^{-m+r+1}}^{(u+1)2^{-m+r+1}} F_r(x, y)dy = 0. \tag{8}$$

证．当 y 固定，而 $x\in[u2^{-r+1},(u+1)2^{-r+1})$ 时，x 的二进位表示中，$x_1,\cdots,x_{r-1}$ 都相同，x_r 之值为

$$x_r=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in[u2^{-r+1},u2^{-r+1}+2^{-r}),\\ 1, & \text{当 } x\in[u2^{-r+1}+2^{-r},(u+1)2^{-r+1}).\end{cases}$$

故得(7)式，类似地可得(8)式．引理证完．

引理 2. 命

$$F(x,y)=\sum_{r=1}^{m-1}F_r(x,y), \tag{9}$$

则

$$\int_0^1\int_0^1 xyF(x,y)dxdy\geqslant(m-1)2^{-2m}(2^{m-2}-n).$$

证．只要证明

$$\int_0^1\int_0^1 xyF_r(x,y)dxdy\geqslant 2^{-2m}(2^{m-2}-n),\quad r=1,2,\cdots,m-1$$

即足．将 x 的积分区间分为 2^{r-1} 个等长部分，将 y 的积分区间分成 2^{m-r-1} 个等长部分，则上面积分等于

$$\Sigma^*\int_{-2^{-r}}^{2^{-r}}\int_{-2^{-m+r}}^{2^{-m+r}}(\xi+x)(\eta+y)(\operatorname{sgn}x)(\operatorname{sgn}y)dxdy, \tag{10}$$

此处 $\operatorname{sgn}x$ 表示 x 的符号，

$$\xi=\frac{x_1}{2}+\cdots+\frac{x_{r-1}}{2^{r-1}}+\frac{1}{2^r},$$

$$\eta=\frac{y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{m-r-1}}{2^{m-r-1}}+\frac{1}{2^{m-r}},$$

而 Σ^* 表示过所有的无任何 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 使(5)式成立的 $x_1,\cdots,x_{r-1},y_1,\cdots,y_{m-r-1}$ 求和．

易知

$$\int_{-a}^{a}(\xi+x)\operatorname{sgn}x\,dx=\int_{-a}^{a}x\operatorname{sgn}x\,dx=a^2,$$

所以(10)式等于

$$\Sigma^* 2^{-2m}.$$

整数组 $x_1,\cdots,x_{r-1},y_1,\cdots,y_{m-r-1}$ 的总数为 2^{m-2}，而使(5)对某 k 成立之总数不超过 n，故 Σ^* 中之总项数不少于 $2^{m-2}-n$．引理

证完.

引理 3. $\int_0^1\int_0^1 F(x, y)^2 dxdy \leqslant m-1$.

证. 由$F(x, y)$的定义(9)得

$$\int_0^1\int_0^1 F(x, y)^2 dx\,dy = \sum_{r=1}^{m-1}\int_0^1\int_0^1 F_r(x, y)^2 dxdy$$

$$+2\sum_{1\leqslant r<s\leqslant m-1}\int_0^1\int_0^1 F_r(x, y)F_s(x, y)dxdy.$$

由于$|F_r(x, y)|\leqslant 1$, 所以上式右端第一个和不超过$m-1$. 今往证明第二个和为0. 固定y, 将x的积分区间分为长度为2^{-s+1}的2^{s-1}个小区间,类似于(7),可知在这些小区间上,积分之值都是0. 引理证完.

引理 4. $\int_{X_k}^1\int_{Y_k}^1 F(x, y)dxdy = 0,\quad 1\leqslant k\leqslant n.$

证. 由$F(x, y)$的定义, 只要证明

$$\int_{X_k}^1\int_{Y_k}^1 F_r(x, y)dxdy = 0,\quad r=1, 2, \cdots, m-1$$

即足. 将上面的积分为下面四个积分之和

$$\int_{X_k}^X\int_{Y_k}^Y + \int_X^1\int_{Y_k}^Y + \int_{X_k}^X\int_Y^1 + \int_X^1\int_Y^1, \tag{11}$$

此处X为$\geqslant X_k$,而又为2^{-r+1}之倍数之最小整数, Y为$\geqslant Y_k$,而又为2^{-m+r+1}之倍数之最小整数. 由于在矩形

$$X_k\leqslant x<X,\quad Y_k\leqslant y<Y$$

中,(5)式成立,故(11)式中第一个积分为0,由引理1可知后面三个积分为0. 引理证完.

定理2的证明. 由引理4可知

$$\int_0^1\int_0^1 N_n(x,y)F(x, y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 F(x, y)\Bigg(\sum_{\substack{k=1\\ X_k<x, Y_k<y}}^n 1\Bigg)dxdy$$

$$=\sum_{k=1}^n\int_{X_k}^1\int_{Y_k}^1 F(x, y)dxdy = 0.$$

故由引理2得

$$\int_0^1\int_0^1 (nxy - N_n(x, y))F(x, y)\,dx\,dy = n\int_0^1\int_0^1 xyF(x, y)\,dx\,dy$$
$$\geqslant n(m-1)2^{-2m}(2^{m-2}-n).$$
取m使$2^{m-2} > n$，则由 Schwarz 不等式及引理 3 可知
$$\int_0^1\int_0^1 (nxy - N_n(x, y))^2 dx\,dy$$
$$\geqslant \left(\int_0^1\int_0^1 (nxy - N_n(x, y))F(x, y)\,dx\,dy\right)^2 \left(\int_0^1\int_0^1 F(x, y)^2 dx\,dy\right)^{-1}$$
$$\geqslant (m-1)(n2^{-2m}(2^{m-2}-n))^2.$$
取m适合
$$8n < 2^m \leqslant 16n,$$
则得
$$2^{m-2} - n > n, \quad n^2 2^{-2m} \geqslant 2^{-8}, \quad m > \log_2 n + 3.$$
从而
$$\int_0^1\int_0^1 (N_n(x, y) - nxy)^2 dx\,dy > 2^{-16}\log_2 n.$$
定理证完.

凡偏差满足
$$\varphi(n) = O(n^{-1+\varepsilon}) \tag{12}$$
的一致分布点集贯$P_{n_l}(k)$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$皆称为最佳分布点集贯，此处与“O”有关的常数依赖于ε.

注　　释

§1. 见 Weyl, H.[1].

§2. 见 Виноградов, И. М.[1].

§3. 当$s = 1$时，见 Erdös, P. 与 Turan, P.[1]. 一般情况，参看 Koksma, J. F.[2], Hlawka, E.[2] 及华罗庚与王元[7].

§4. 见 Бахвалов, Н. С.[1]，华罗庚与王元[7].

§9. 定理 1 是 Niederreiter, H.[1] 及华罗庚与王元[7]独立证明的.

§10. 关于偏差的下界估计，有 Van Aardenne-Ehrenfest, T.[1]

的结果 $\varphi(n) > \frac{c\log\log n}{n\log\log\log n}$. 定理 1,2 的证明见 Roth, K. F.[1]. 当 $s=2$ 时，Schmidt, W. M.[3] 更进一步证明了定理 1 的右端可以换为 $\frac{c\log n}{n}$.

第四章　各种点集的偏差估计

§1. 平均格网点集

今后常假定 $s \geqslant 2$，命 $m_1, \cdots, m_s$ 为 s 个正整数，$n = m_1 \cdots m_s$ 及 $m = \min(m_1, \cdots, m_s)$. 点集

$$\left(\frac{l_1}{m_1}, \cdots, \frac{l_s}{m_s}\right), \quad 0 \leqslant l_i < m_i, \ 1 \leqslant i \leqslant s \tag{1}$$

称为平均格网点集，下面求其偏差.

定理 1. 点集(1)有偏差

$$\varphi(n) \leqslant 2^s m^{-1}. \tag{2}$$

证. 命 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$. 由于适合于

$$\frac{l_i}{m_i} < \gamma_i, \quad l_i = 0, 1, \cdots$$

的 l_i 的个数为 $m_i\gamma_i$（当 $m_i\gamma_i$ 为整数）或 $[m_i\gamma_i] + 1$（当 $m_i\gamma_i$ 非整数），所以

$$N_n(\boldsymbol{\gamma}) = ([m_1\gamma_1] + \vartheta_1) \cdots ([m_s\gamma_s] + \vartheta_s),$$

其中 $\vartheta_i = 0$ 或 1 $(1 \leqslant i \leqslant s)$，因此

$$0 \leqslant \frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}| \leqslant \prod_{i=1}^{s} \frac{(m_i\gamma_i + 1)}{m_i} - \prod_{i=1}^{s} \gamma_i$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \left(\gamma_i + \frac{1}{m_i}\right) - \prod_{i=1}^{s} \gamma_i \leqslant 2^s m^{-1}.$$

定理证完.

定理 2. 点集(1)的偏差适合于

$$\varphi(n) \geqslant \frac{1}{2m} \left(\geqslant 2n^{-\frac{1}{s}}\right). \tag{3}$$

证. 不妨假定 $m = m_1$，取 $\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{1}{2m}, 1, \cdots, 1\right)$，则

$$N_n(\boldsymbol{\gamma}) = m_2\cdots m_s = \frac{n}{m},$$

所以

$$\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n} - |\boldsymbol{\gamma}|\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m} \geqslant 2n^{-\frac{1}{s}}.$$

定理证完.

由定理 2 可知平均格网点集的偏差 $\varphi(n)$ 不能比 $O(n^{-\frac{1}{s}})$ 更好,当 s 充分大时,收敛于零的速度是很慢的.

显然用平均格网点集贯时，最好取 $m_1 = \cdots = m_s = m$，即取点集

$$\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m}\right), \quad 0 \leqslant l_1, \cdots, l_s \leqslant m. \tag{4}$$

§2. 构造最佳分布点集贯

引理 1. 适合于同余式

$$x \equiv a(\bmod m), \quad 1 \leqslant x \leqslant n$$

的整数 x 的个数等于 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 或 $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$.

证. 把适合 $1 \leqslant x \leqslant n$ 的整数，按次序分成每 m 个整数为一段,共分为 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 个整段并且可能还有一个分段. 每个整段中有一个整数适合同余式,分段中则可能有一个整数适合同余式,故得引理.

引理 2. 若 $m_1, \cdots, m_n$ 为两两互素的整数,则同余式组

$$x \equiv a_i(\bmod m_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

有唯一的解 mod $m_1 \cdots m_n$.

证明见华罗庚[1]第二章.

命 $r > 1$ 为一正整数,则任一正整数 k 可以唯一表示为

$$k = k_0 + k_1 r + \cdots + k_M r^M, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant r - 1.$$

记为 r 进位数 $k = k_M\cdots k_1 k_0$, $[0, 1]$ 中任何数 h 一定可以表示为

$$h = \frac{h_0}{r} + \frac{h_1}{r^2} + \cdots + \frac{h_M}{r^{M+1}} + \cdots, \quad 0 \leqslant h_i \leqslant r - 1.$$

记之为 $h = 0.h_0h_1\cdots h_M\cdots$.

对应于一个正整数

$$k = k_0 + k_1 r + \cdots + k_M r^M, \tag{1}$$

有一个 (0, 1)间的数与之对应

$$\varphi(k) = \frac{k_0}{r} + \frac{k_1}{r^2} + \cdots + \frac{k_M}{r^{M+1}}. \tag{2}$$

如果 $k_M \neq 0$, 由于

$$r^M \leqslant k < r^{M+1},$$

因此得出

$$M = \left[\frac{\log k}{\log r}\right]. \tag{3}$$

$M + 1$ 就是 k 的位数.

$\varphi_r(k)$ ($k = 1, 2, \cdots$) 是一个一致分布点集贯,更确切些,有次之引理.

引理 3. 假定 $n > r$, 则点集

$$\varphi_r(k), \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

有偏差

$$\varphi(n) < \left(\frac{r\log rn}{\log r}\right)n^{-1}. \tag{5}$$

证. 命 α 适合于 $0 \leqslant \alpha < 1$. 把 α 写成为

$$\alpha = 0.a_0a_1\cdots a_M\cdots \quad . \tag{6}$$

(我们不妨假定 α 的位数是无穷的, 如果 α 的位数有限, 则可以将最后一位减 1, 而在后面添上无穷多个 $r-1$). 如果 $\varphi_r(k) < \alpha$, 则正整数 k 必定适合以下的条件之一:

1) $k_0 < a_0$,

2) $k_0 = a_0, \quad k_1 < a_1$,

3) $k_0 = a_0, \quad k_1 = a_1, \quad k_2 < a_2$,

$\cdots\cdots$

当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时,表达式(1)的位数不超过 $\left[\frac{\log n}{\log r}\right] + 1$. 如果允许 $k_M = 0$ 等,则不妨假定 M 由 $\left[\frac{\log n}{\log r}\right]$ 确定. 以上步骤不是无

穷的,最后两步是:

$M+1)\ k_0=a_0,\quad k_1=a_1,\cdots,\quad k_{M-1}=a_{M-1},\quad k_M<a_M,$

$M+2)\ k_0=a_0,\quad k_1=a_1,\cdots,\quad k_{M-1}=a_{M-1},\quad k_M=a_M,$

把这些式子写成同余式的形式,则得

1) $k\equiv k_0 \pmod r,\quad 0\leqslant k_0<a_0$(共 a_0 个),

2) $k\equiv a_0+k_1r \pmod{r^2},\quad 0\leqslant k_1<a_1$(共$a_1$个),

3) $k\equiv a_0+a_1r+k_2r^2 \pmod{r^3},\quad 0\leqslant k_2<a_2$(共 a_2 个),

....

$M+1)\ k\equiv a_0+a_1r+\cdots+a_{M-1}r^{M-1}+k_Mr^M \pmod{r^{M+1}},$

$0\leqslant k_M<a_M$(共 a_M 个),

$M+2)\ k\equiv a_0+a_1r+\cdots+a_{M-1}r^{M-1}+a_Mr^M \pmod{r^{M+2}}$

(共 1 个)

由于 $1\leqslant k\leqslant n$, 所以由引理 1 可知适合于1), 2), 3), ⋯, $M+1$), $M+2$)的解数各为

$$a_0\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\vartheta\right),$$

$$a_1\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]+\vartheta\right),$$

$$a_2\left(\left[\frac{n}{r^3}\right]+\vartheta\right),$$

......

$$a_M\left(\left[\frac{n}{r^{M+1}}\right]+\vartheta\right),$$

$$\left(\left[\frac{n}{r^{M+2}}\right]+\vartheta\right)=\vartheta,$$

其中 ϑ 为某适合于 $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$ 的数,但不一定都相等,命$N_n(\alpha)$为适合于 $\varphi_r(k)<\alpha(1\leqslant k\leqslant n)$ 的 k 的个数,则

$$N_n(\alpha)=a_0\left(\left[\frac{n}{r}\right]+\vartheta\right)+a_1\left(\left[\frac{n}{r^2}\right]+\vartheta\right)+\cdots$$
$$+a_M\left(\left[\frac{n}{r^{M+1}}\right]+\vartheta\right)+\vartheta$$

及

$$\left|N_n(\alpha)-a_0\frac{n}{r}-a_1\frac{n}{r^2}-\cdots-a_M\frac{n}{r^{M+1}}\right|$$

$$\leqslant a_0\left|\frac{n}{r}-\left[\frac{n}{r}\right]-\vartheta\right|+a_1\left|\frac{n}{r^2}-\left[\frac{n}{r^2}\right]-\vartheta\right|+\cdots$$

$$+a_M\left|\frac{n}{r^{M+1}}-\left[\frac{n}{r^{M+1}}\right]-\vartheta\right|+\vartheta\leqslant a_0+a_1+\cdots$$

$$+a_M+1.$$

即得

$$|N_n(\alpha)-\alpha_n|\leqslant a_0+a_1+\cdots+a_M+1$$
$$+\left(\frac{a_{M+1}}{r^{M+2}}+\frac{a_{M+2}}{r^{M+3}}+\cdots\right)n. \tag{7}$$

由于 $a_0+a_1+\cdots+a_M\leqslant(M+1)(r-1)$ 及

$$\frac{a_{M+1}}{r^{M+2}}+\frac{a_{M+2}}{r^{M+3}}+\cdots\leqslant(r-1)\left(\frac{1}{r^{M+2}}+\frac{1}{r^{M+3}}+\cdots\right)$$
$$=\frac{r-1}{r^{M+2}}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}=\frac{1}{r^{M+1}}<\frac{1}{n},$$

所以当 $n>r$ 时有

$$|N_n(\alpha)-\alpha_n|\leqslant(M+1)(r-1)+2$$
$$\leqslant\left(\frac{\log n}{\log r}+1\right)(r-1)+2\leqslant\frac{r\log rn}{\log r}.$$

引理证完.

定理 1. 假定 $r_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 表示 s 个两两互素的大于 1 的正整数,又假定 $n>\max(r_1,\cdots,r_s)$,则点集

$$(\varphi_{r_1}(k),\cdots,\varphi_{r_s}(k)),\quad k=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

有偏差

$$\varphi(n)\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{r_i\log r_in}{\log r_i}\right)n^{-1}.$$

证. 我们假定 $s=2$,对于 $s>2$ 的情况,证明是完全类似的. 取 r 与 t 为大于 1 且互素的整数,今往研究 $(\varphi_r(k),\ \varphi_t(k))$ $(k=1,2,\cdots)$的分布问题. 假定 $0\leqslant\beta\leqslant1$ 及它的 t 进位表示

为

$$\beta = 0.b_0 b_1 \cdots.$$

命 $N_n(\alpha, \beta)$ 表示适合于

$$\varphi_r(k) < \alpha, \quad \varphi_t(k) < \beta, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

的整数 k 的个数. 又命

$$L = \left[\frac{\log n}{\log t}\right],$$

则可以将适合于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的整数 k 表示为

$$k = l_0 + l_1 t + \cdots + l_L t^L, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant t - 1,$$

与 1), 2), $\cdots$ 相类似,我们得到一批同余式

1)′ $k \equiv l_0 \pmod t, \quad 0 \leqslant l_0 < b_0,$

2)′ $k \equiv b_0 + l_1 t \pmod{t^2}, \quad 0 \leqslant l_1 < b_1,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$L+1$)′ $k \equiv b_0 + b_1 t + \cdots + b_{L-1} t^{L-1} + l_L t^L \pmod{t^{L+1}},$

$$0 \leqslant l_L < b_L,$$

$L+2$)′ $k \equiv b_0 + b_1 t + \cdots + b_{L-1} t^{L-1} + b_L t^L \pmod{t^{L+2}}.$

由引理 2 可知, m) 中一个式子与 l)′中一个式子联立起来,可得到 mod $r^m t^l$ 的一个式子. 对这模的同余式共 $a_{m-1} b_{l-1}$ 个, 因而共有

$$a_{m-1} b_{l-1} \left(\left[\frac{n}{r^m t^l} \right] + \vartheta \right)$$

个 k 适合(9),所以适合(9)的 k 的个数总共为

$$\sum_{m=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{L+1} a_{m-1} b_{l-1} \left(\left[\frac{n}{r^m t^l} \right] + \vartheta \right) + \sum_{m=1}^{M+1} a_{m-1} \vartheta + \sum_{l=1}^{L+1} b_{l-1} \vartheta + \vartheta,$$

因此

$$\left| N_n(\alpha, \beta) - \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{L+1} a_{m-1} b_{l-1} \frac{n}{r^m t^l} \right|$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{L+1} a_{m-1} b_{l-1} + \sum_{m=1}^{M+1} a_{m-1} + \sum_{l=1}^{L+1} b_{l-1} + 1$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{M+1} a_{m-1} + 1 \right) \left(\sum_{l=1}^{L+1} b_{l-1} + 1 \right).$$

故当 $n > \max(r, t)$ 时有

$$|N_n(\alpha, \beta) - \alpha\beta n| \leqslant \left(\sum_{m=1}^{M+1} a_{m-1} + 1\right)\left(\sum_{l=1}^{L+1} b_{l-1} + 1\right)$$

$$+ n \sum_{m=M+2}^{\infty} \frac{a_{m-1}}{r^m} + n \sum_{l=L+2}^{\infty} \frac{b_{l-1}}{t^l} + n^{-1}$$

$$\leqslant ((r-1)(M+1)+1)((t-1)(L+1)+1)+3$$

$$\leqslant ((r-1)(M+1)+2)((t-1)(L+1)+2)$$

$$\leqslant \left(\frac{r\log rn}{\log r}\right)\left(\frac{t\log tn}{\log t}\right). \tag{10}$$

定理证完.

引理 4. 在引理 3 的假定下,当 $n > r^2$ 时有

$$\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l}{q}\right) - \frac{l}{q}\right| \leqslant \left(\frac{\log rn}{2\log r}\right)n^{-1}.$$

证. 命

$$1 - \alpha = 0.a_0'a_1'\cdots a_M'\cdots,$$

则

$$a_\nu + a_\nu' = r - 1, \quad \nu = 0, 1, \cdots.$$

因此由(7)可知,当 $n > r^2$ 时

$$|N_n(\alpha) - \alpha_n| + |N_n(1-\alpha) - (1-\alpha)n|$$

$$\leqslant (r-1)(M+1) + 2 + (r-1)\left(\frac{1}{r^{M+2}} + \frac{1}{r^{M+3}} + \cdots\right)n$$

$$\leqslant (r-1)(M+1) + 2 + \frac{n}{r^{M+1}} \leqslant (r-1)(M+1) + 3$$

$$\leqslant \frac{r\log rn}{\log r},$$

因而

$$\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l}{q}\right) - \frac{l}{q}\right| \leqslant \left(\frac{r\log rn}{2\log r}\right)n^{-1}.$$

引理证完.

定理 2. 在定理 1 的假定下, 当 $n > \max(r_1^4, \cdots, r_s^4)$ 时有

$$\frac{1}{q^s}\sum_{l_1=1}^{q}\cdots\sum_{l_s=1}^{q} q^{\delta_{l_1,q}+\cdots+\delta_{l_s,q}}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l_1}{q},\cdots,\frac{l_s}{q}\right)-\frac{l_1\cdots l_s}{q^s}\right|$$

$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{r_i\log r_i n}{2\log r_i}\right)n^{-1}.$$

证. 与定理 1 一样,我们仍假定 $s=2$, 命

$$1-\beta=0.b_0'b_1'\cdots b_L'\cdots,$$

则

$$b_\nu+b_\nu'=t-1,\quad \nu=0,1,\cdots.$$

所以由(10)得

$$\begin{aligned}&|N_n(\alpha,\beta)-\alpha\beta n|+|N_n(1-\alpha,\beta)-(1-\alpha)\beta n|\\&\quad+|N_n(\alpha,1-\beta)-\alpha(1-\beta)n|\\&\quad+|N_n(1-\alpha,1-\beta)-(1-\alpha)(1-\beta)n|\\&\quad\leqslant((r-1)(M+1)+2)((t-1)(L+1)+2)\\&\quad+n\sum_{m=M+2}^{\infty}\frac{r-1}{r^m}+n\sum_{l=L+2}^{\infty}\frac{t-1}{t^l}+\frac{4}{n}\\&\quad\leqslant((r-1)(M+1)+2)((t-1)(L+1)+2)+3\\&\quad\leqslant((r-1)(M+1)+3)((t-1)(L+1)+3),\end{aligned}$$

因此当 $n>\max(r^4,t^4)$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^2}\sum_{l=1}^{q-1}\sum_{m=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l}{q},\frac{m}{q}\right)-\frac{lm}{q^2}\right|+\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l}{q},1\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{l}{q}\right|+\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(1,\frac{m}{q}\right)-\frac{m}{q}\right|\\&\leqslant\frac{1}{4n}((r-1)(M+1)+3)((t-1)(L+1)+3)\\&\quad+\frac{1}{2n}((r-1)(M+1)+3)+\frac{1}{2n}((t-1)(L+1)+3)\\&\leqslant\frac{1}{4n}((r-1)(M+1)+5)((t-1)(L+1)+5)\\&<\left(\frac{r\log rn}{2\log r}\right)\left(\frac{t\log tn}{2\log t}\right)n^{-1}.\end{aligned}$$

定理证完.

定理 3. 假定 $n > \max(r_1, \cdots, r_{s-1})$, 则点集

$$\left(\frac{k}{n}, \varphi_{r_1}(k), \cdots, \varphi_{r_{s-1}}(k)\right), \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{11}$$

有偏差

$$\varphi(n) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{r_i \log r_i n}{\log r_i}\right) n^{-1}. \tag{12}$$

证. 命 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$, 若 $n\gamma_1 \leqslant \max(r_1, \cdots, r_{s-1}) = r$ (定义), 则由 $\frac{k}{n} < \gamma_1$ 可得 $N_n(\boldsymbol{\gamma}) \leqslant r$, 故(12)之左端不超过 $\frac{r}{n}$, 而(12)之右端则显然大于 $\frac{r}{n}$, 故定理成立. 现在假定 $n\gamma_1 > r$, 由定义可知 $N_n(\boldsymbol{\gamma})$ 即等于适合于

$$\varphi_{r_1}(k) < r_2, \cdots, \quad \varphi_{r_{s-1}}(k) < \gamma_s, \quad 1 \leqslant k < n\gamma_1$$

的整数 k 的个数. 在此还可以假定 $n\gamma_1$ 为整数, 否则若 $m < n\gamma_1 < m+1$, m 为一整数, 则将 γ_1 换为 $\frac{m+1}{n}$, $N_n(\boldsymbol{\gamma})$ 之值不变, 故由定理 1 的证明得

$$\begin{aligned}\left|\frac{N_n(\boldsymbol{\gamma})}{n\gamma_1} - \gamma_2 \cdots \gamma_s\right| &\leqslant \gamma_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{r_i \log r_i \gamma_1 n}{\log r_i}\right) n^{-1} \\ &\leqslant \gamma_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{r_i \log r_i n}{\log r_i}\right) n^{-1}.\end{aligned}$$

故得定理.

类似地, 由定理 2 可得

定理 4. 在定理 3 的假定下, 当 $n > \max(r_1^4, \cdots, r_{s-1}^4)$ 时有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^s}\sum_{l_1=1}^{q} \cdots \sum_{l_s=1}^{q} q^{\delta_{l_1,q} + \cdots + \delta_{l_s,q}} \left| N_n\left(\frac{l_1}{q}, \cdots, \frac{l_s}{q}\right) - \frac{l_1 \cdots l_s}{q^s}\right| \\ &\quad \leqslant \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{r_i \log r_i n}{2 \log r_i}\right) n^{-1}.\end{aligned}$$

由定理 1 与定理 2 可知, 当 $n = 2, 3, \cdots$ 时, 点集贯 (8) 与

(11)分别有偏差 $\varphi(n)=O\left(\frac{(\log n)^{s}}{n}\right)$ 与 $\varphi(n)=O\left(\frac{(\log n)^{s-1}}{n}\right)$，因此它们都是最佳分布点集贯（见 § 3.10）.

附记.

在实际应用定理 1 与定理 3 时，可以取 $r_i=p_i$ 为第 i 个素数. 现在粗估一下定理 1 给出的点集(8)的偏差,例如 $s=10$，则必需

$$\left(\prod_{i=1}^{10}\frac{p_i\log p_i n}{\log p_i}\right)n^{-1}\leqslant 1 \tag{13}$$

时,定理 1 才有意义. 粗估可知需 $n\geqslant 10^{20}$，因而当 s 稍大时，n 亦必须很大,才能保证(13)式成立.

§ 3. 方幂点集

今后我们常用 p 表示素数，所谓方幂点集即借助于整数 k 的方幂定义的点集或这种点集的变体,换言之,我们称诸点集

$$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\},\left\{\frac{ak}{p}\right\},\cdots,\left\{\frac{a^{s-1}k}{p}\right\}\right),\quad 1\leqslant a,k\leqslant p, \tag{1}$$

$$\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\},\left\{\frac{k^2}{p^2}\right\},\cdots,\left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant p^2, \tag{2}$$

及

$$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\},\left\{\frac{k^2}{p}\right\},\cdots,\left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant p, \tag{3}$$

为方幂点集. 这些点集的偏差估计往往需要借助于完整三角和的估计(参看华罗庚[2,3]). 本节将证明

定理 1. 假定 $p>e^s$，则点集(1)有偏差

$$\varphi(p^2)<\frac{2^{2s}(s+1)}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s. \tag{4}$$

定理 2. 假定 $p>e^s$，则点集(2)有偏差

$$\varphi(p^2)<\frac{2^{2s}(s+1)}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s \tag{5}$$

定理 3. 假定 $p>e^{2s}$，则点集(3)有偏差

$$\varphi(p) < \left(\frac{2}{\pi}\right)^s s p^{-\frac{1}{2}}(\log 64p)^s. \tag{6}$$

引理 1. 命 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为一组非全为 p 之倍数之整数，则同余式

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0 (\bmod n)$$

之解数不超过 n.

证明见华罗庚[1]第二章

引理 2. 命

$$S = \sum_{x=1}^{p^2} e^{\frac{2\pi i f(x)}{p^2}},$$

此处 $f(x) = m_1 x + \cdots + m_s x^s$，其中至少有一个系数 m_i 非 p 之倍数，则

$$|S| \leqslant (s-1)p.$$

证. 由于

$$f(x + py) = f(x) + f'(x)py (\bmod p^2),$$

所以

$$S = \sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{\frac{2\pi i f(x+py)}{p^2}} = \sum_{x=1}^{p} e^{\frac{2\pi i f(x)}{p^2}} \sum_{y=1}^{p} e^{\frac{2\pi i f'(x)y}{p}},$$

故由引理 3.5.1 (即第三章, § 5. 引理 1) 与引理 1 可知

$$|S| \leqslant \sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{y=1}^{p} e^{\frac{2\pi i f'(x)y}{p}}\right| = p \sum_{\substack{x=1 \\ f'(x)\equiv 0 (\bmod p)}}^{p} 1 \leqslant (s-1)p.$$

引理证完.

我们还要用 Weil, A. 关于完整三角和估计的结果.

引理 3. 命 $f(x)$ 适合于引理 2 的要求，则

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{\frac{2\pi i f(x)}{p}}\right| \leqslant (s-1)\sqrt{p}.$$

证明见 Weil, A. [1].

定理 1 的证明. 命 $\mathbf{a} = (1, a, \cdots, a^{s-1})$ 及 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_s)$. (注意，有时 $(m_1, \cdots, m_s)$ 表示 $m_1, \cdots, m_s$ 的最大公约，请勿与 s 维矢量相混淆.) 由引理 3.5.1 与引理 1 可知

$$\sum(\mathbf{m})=\frac{1}{p^2}\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{p}}=p^{-1}\sum_{\substack{a=1\\(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p)}}^{p}1$$

$$\leqslant\begin{cases}1, & 当\ p\mid(m_1,\cdots,m_s),\\ \dfrac{s-1}{p}, & 当\ p\nmid(m_1,\cdots,m_s),\end{cases}$$

所以由(3.3.10)(即第三章，§3，公式(10))可知

$$\sum_{|m_i|\leqslant p^2}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\sum(\mathbf{m})\right|\leqslant\sum_{\substack{p\mid(m_1,\cdots,m_s)\\|m_i|\leqslant p^2}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$+\frac{s-1}{p}\sum_{\substack{p\nmid(m_1,\cdots,m_s)\\|m_i|\leqslant p^2}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\leqslant\frac{s}{p}\left(1+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{p^2}\frac{1}{m}\right)^s$$

$$<\frac{2^{2s}s}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s.$$

在定理 3.3.1 中取 $r=1$，$\eta=p^{-1}$ 及 $h=p^2$，则得

$$\varphi(p^2)<\frac{2^{2s}s}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s+\frac{2^{2s-1}s}{\pi^{s+1}}p^{-1}(\log 8p)^{s-1}$$

$$+(5s+6)p^{-1}<\frac{2^{2s}(s+1)}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s.$$

定理证完.

定理 2 的证明. 记 $\mathbf{k}=(k,k^2,\cdots,k^s)$，则由引理 2 可知

$$\sum_{|m_i|\leqslant p^2}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p^2}e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})}{p^2}}\right|\leqslant\sum_{\substack{p\mid(m_1,\cdots,m_s)\\|m_i|\leqslant p^2}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$+\frac{s-1}{p}\sum_{\substack{p\nmid(m_1,\cdots,m_s)\\|m_i|\leqslant p^2}}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}<\frac{2^{2s}s}{\pi^s}(\log 8p)^s p^{-1}.$$

在定理 3.3.1 中取 $r=1$，$\eta=p^{-1}$ 及 $h=p^2$ 即得定理.

定理 3 的证明. 由引理 3 可知

$$\sum_{|m_i|\leqslant p}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})}{p}}\right|\leqslant\frac{s-1}{\sqrt{p}}\sum_{|m_i|<p}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$\leqslant\frac{s-1}{\sqrt{p}}\left(1+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m}\right)^s\leqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^s(s-1)p^{-\frac{1}{2}}(\log 64p)^s.$$

在定理 3.3.1 中取 $r=1$, $\eta=p^{-\frac{1}{2}}$ 及 $h=p-1$, 则得

$$\varphi(p)<\left(\frac{2}{\pi}\right)^s(s-1)(\log 64p)^s p^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^s s\sqrt{p}}{\pi^{s+1}(p-1)}(\log 64p)^{s-1}$$

$$+(5s+6)p^{-\frac{1}{2}}<\left(\frac{2}{\pi}\right)^s sp^{-\frac{1}{2}}(\log 64p)^s.$$

定理证完.

今往研究由定理 1 给出的点集偏差的下界问题. 取 $x_1=1$, $x_2=\frac{2}{p}$, $x_3=\cdots=x_s=1$, 由于同余式

$$ak\equiv 0 \quad 或 \quad 1 \pmod p), \quad 1\leqslant a, k\leqslant p$$

共有 $3p-2$ 对解 a, k, 所以

$$N_{p^2}\left(1, \frac{2}{p}, 1, \cdots, 1\right)=3p-2,$$

因此

$$\left|\frac{1}{p^2}N_{p^2}\left(1, \frac{2}{p}, 1, \cdots, 1\right)-\frac{2}{p}\right|$$

$$=\frac{3p-2}{p^2}-\frac{2}{p}=\frac{p-2}{p^2}>\frac{1}{2p},$$

故由定理 1 给出的点集的偏差 $\varphi(p^2)>\frac{1}{2p}$, 换言之,(1)式右端之 p^{-1} 已不允许再有改进.

附记.

对于 $\varepsilon>0$, 在定理 3.3.1 中, 取 $r=r(\varepsilon)$ 充分大, $\eta=p^{-1}$ 及 $h=[p^{1+r^{-1}}]+1$, 则当 $p>c(s,\varepsilon)$ 时, 点集(1)与(2)的偏差估计可以改进为

$$\varphi(p^2)<\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^s s+\varepsilon\right)(\log p)^s p^{-1}. \tag{7}$$

又在定理 3.3.1 中取 $r=r(\varepsilon)$ 充分大, $\eta=p^{-\frac{1}{2}}$ 及 $h=[p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}}]$, 则当 $p>c(s,\varepsilon)$ 时,点集(3)的偏差估计可以改进为

$$\varphi(p)<\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^s(s-1)+\varepsilon\right)(\log p)^s p^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

§ 4. 佳点集

命 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$，若形为

$$P(k) = (\{\gamma_1 k\}, \cdots, \{\gamma_s k\}), k = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

的点集有偏差

$$\varphi(n) = c(\boldsymbol{\gamma}, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}, \qquad (2)$$

则称点集(1)为佳点集，由此得到的点集贯为最佳分布点集贯(见§ 3.10)，而 $\boldsymbol{\gamma}$ 则称为佳点.

由定理 3.9.1 可知，若对于所有的整矢量 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 皆有

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle \geqslant c(\boldsymbol{\gamma}, \varepsilon)\|\mathbf{m}\|^{-1-\varepsilon}, \qquad (3)$$

则 $\boldsymbol{\gamma}$ 即为佳点，而(1)即为佳点集，故佳点集的存在与构造问题即化为适合于不等式(3)的实矢量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的存在与构造问题.

本节将证明

定理 1. 对于所有整矢量 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 都适合于(3)的点 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$ 的 Lebesgue 测度为 1.

由定理 1 立即推出

定理 2. 使点集(1)有偏差(2)的点 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$ 的 Lebesgue 测度为 1.

定理 1 是以下二引理的推论.

引理 1. 假定 c 是常数，n 为非零整数，则适合于

$$\langle c + nx\rangle \leqslant \varepsilon, \quad x \in [0, 1]$$

的点的测度 $\leqslant 2\varepsilon$.

证. 1) 不妨假定 $\varepsilon < \frac{1}{2}$，

2) 当 $c = 0$ 时，显然使

$$\langle nx\rangle \leqslant \varepsilon$$

成立的点是由以下的区间形成的:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\varepsilon}{n}, \quad \frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1+\varepsilon}{n}, \quad \frac{2-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2+\varepsilon}{n}, \cdots,$$

$$\frac{n-1-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{n-1+\varepsilon}{n}, \quad \frac{n-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant 1.$$

这些区间的测度之和 $\leqslant 2\varepsilon$.

3) 当 $c \neq 0$, 则

$$c + nx = n\left(x + \frac{c}{n}\right) = ny,$$

仍然化为 2) 的情况. 引理证完.

引理 2. 若 $\varphi(\bar{n}) > 0$ 及

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{n}\varphi(\bar{n})} < \infty,$$

则几乎所有的点 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$ 都满足于

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle > \frac{c(\boldsymbol{\gamma}, \varphi)}{\prod_{i=1}^{s} \bar{m}_i \varphi(\bar{m}_i)}, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0}.$$

证. 1) 当 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, 则适合于

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle \leqslant \varepsilon$$

的点 $\boldsymbol{\gamma}$ 的测度 $\leqslant 2\varepsilon$, 这由引理 1 对 s 行归纳法立刻得出.

2) 由 1) 可知,对于某一 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 使

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle \leqslant \frac{\eta}{\prod_{i=1}^{s} \bar{m}_i \varphi(\bar{m}_i)}, \quad \eta > 0$$

成立的点 $\boldsymbol{\gamma}$ 的集合 σ_η 的测度不超过

$$2\eta \sum{}' \frac{1}{\prod_{i=1}^{s} \bar{m}_i \varphi(\bar{m}_i)} = 2\eta\left(\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}\varphi(\bar{m})}\right)^s - \frac{1}{\varphi(1)^s}\right)$$

$$< c(\varphi)\eta.$$

3) 再证,对任意 $\tau > 0$, 都不能使

$$\langle(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m})\rangle > \frac{\tau}{\prod_{i=1}^{s} \bar{m}_i \varphi(\bar{m}_i)}$$

对于所有的 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 皆满足的点 $\boldsymbol{\gamma}$ 的集合 σ 的测度为 0.

不然的话, 假定 σ 的测度为 $\delta > 0$, 则对任一 $\eta > 0$, σ 一定

是σ_η的子集合. 取$\eta=\dfrac{\delta}{2c(\varphi)}$, 则$\sigma$的测度不超过$\sigma_\eta$的测度,即不超过$\dfrac{\delta}{2}$, 故得矛盾. 引理证完.

§5. 佳点集的构造定理

定理 4.1 说明G_s中佳点所构成的集合有 Lebesgue 测度 1. 但定理 4.1 是非构造性的, 由其证明并不提供具体构造出任何佳点的方法. 具体构造出佳点则还是轭近的事情. 关于这方面的结果,就是下面 Schmidt, W. M. 关于推广的 Thue-Siegel-Roth 定理与 Baker, A. 关于指数函数联立有理逼近定理.

引理 1. 命$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$, 此处$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant s)$为一组实代数数, 且$1,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$在有理数域$R$上线性独立, 则对于任何整矢量$\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$皆有

$$\langle(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{m})\rangle>c(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\|\mathbf{m}\|^{-1-\varepsilon}. \tag{1}$$

证明见 Schmidt, W. M. [1, 2].

引理 2. 命$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$, 此处$\beta_i=e^{r_i}(1\leqslant i\leqslant s)$, 而诸$r_i(1\leqslant i\leqslant s)$为一组互异的非零有理数, 则对于任何整矢量$\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$皆有

$$\langle(\boldsymbol{\beta},\mathbf{m})\rangle>c(\boldsymbol{\beta},\varepsilon)\|\mathbf{m}\|^{-1-\varepsilon}. \tag{2}$$

证明见 Baker, A. [1].

由引理 1 与引理 2 立即推出

定理 1. 点集

$$P(k)=(\{\alpha_1k\},\cdots,\{\alpha_sk\}),\quad 1\leqslant k\leqslant n \tag{3}$$

有偏差

$$\varphi(n)=c(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)n^{-1+\varepsilon}. \tag{4}$$

定理 2. 点集

$$P(k)=(\{\beta_1k\},\cdots,\{\beta_sk\}),\quad 1\leqslant k\leqslant n \tag{5}$$

有偏差

$$\varphi(n)=c(\boldsymbol{\beta},\varepsilon)n^{-1+\varepsilon}. \tag{6}$$

附记。

1. 在具体使用佳点集时，不少学者曾建议取实 Disichlet 域 $R(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_t})$ 的基底的一部分（例如 Davis, P. J. and Rabinowitz, P. [1]）。我们的一些计算表示还是取实分圆域 $R\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$ 基底的一部分，即取 $\boldsymbol{\gamma} \in G_s$，其中

$$\gamma_k = \left\{2\cos\frac{2\pi k}{p}\right\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s,$$

此处 p 为适合于 $\frac{p-3}{2} \geqslant s$ 的最小素数，或若取

$$\gamma_k = \{e^k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s$$

更好些（参看第八章）。

2. 由 Mahler, K. [1] 可知引理 2 中的常数 $c(\beta, \varepsilon)$ 是可以计算的。

3. 关于定理 4.1，除引理 1，引理 2 外，还有一些构造性结果，但由于未作过相应的数值计算工作，所以在此就不一一列举了。

§6. $\mathscr{R}_s$ 点集

命 $\left(\frac{h_1}{q}, \cdots, \frac{h_s}{q}\right)$ 为一个有理矢量，若格点集

$$\left(\left\{\frac{h_1}{q}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{h_s}{q}k\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n(\leqslant q) \tag{1}$$

有偏差

$$\varphi(n) = c(s, \varepsilon)n^{-1+\varepsilon}, \tag{2}$$

则称格点集(1)为佳格点集，特别当 $n = q$ 时，称点集(1)为完全佳格点集，并称 $\mathbf{h}$ 为 mod q 之极值系数。

如 §1.2 所示，命 $\mathscr{F}_s$ 为 s 次实代数数域，$\omega_1, \cdots, \omega_s$ 为 $\mathscr{F}_s$ 的一组整底，不妨假定 $\omega_2, \cdots, \omega_s$ 为无理数，命整数组 $(n_l, h_1^{(l)}, \cdots, h_s^{(l)})$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 适合于关系式 (2.4)，即

$$\left|\frac{h_j^{(l)}}{n_l} - \omega_j\right| \leqslant c(\mathscr{F}_s)n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s. \tag{3}$$

本节将证明(略去指标 l).

定理 1. 点集

$$\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}, \left\{\frac{h_2k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{h_sk}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{4}$$

有偏差

$$\varphi(n) = c(\mathscr{F}_s, \varepsilon)n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(s-1)}+\varepsilon}. \tag{5}$$

定理 2. 点集

$$\left(\left\{\frac{h_2k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{h_sk}{n}\right\}\right), 1 \leqslant k \leqslant q \leqslant n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}} \tag{6}$$

有偏差

$$\varphi(q) = c(\mathscr{F}_s, \varepsilon)q^{-1+\varepsilon}. \tag{7}$$

由于 1, $\omega_2, \cdots, \omega_s$ 是 $\mathscr{F}_s$ 的基底，所以它们在有理数域 R 上是线性独立的,所以由 (3), 引理 5.1, 定理 3.9.2 与定理 3.9.3 即得定理 1 与定理 2.

点集(4)与(6)都是由代数数域 $\mathscr{F}_s$ 决定的，故称它们为 $\mathscr{F}_s$ 点集. 点集 (6) 是佳格点集. 在 $\mathscr{F}_s$ 点集中，我们特别提出分圆域点集,即 $\mathscr{R}_s$ 点集. 命 p 为素数 $\geqslant 5$ 及 $s = \frac{p-1}{2}$, 取实分圆域 $\mathscr{R}_s = R\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$. 记 $c_1^{(l)} = 1$ 及 $c_j^{(l)}(2 \leqslant j \leqslant s)$ 适合于

$$\left|\frac{c_j^{(l)}}{n_l} - 2\cos\frac{2\pi j}{p}\right| \leqslant c(\mathscr{R}_s, \varepsilon)n_l^{-1-\frac{1}{s-1}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s, \tag{8}$$

于是得到(略去指标 l)

定理 3. 点集

$$\left(\left\{\frac{c_1k}{n}\right\}, \left\{\frac{c_2k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{c_sk}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{9}$$

有偏差

$$\varphi(n) = c(\mathscr{R}_s, \varepsilon)n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(s-1)}+\varepsilon}. \tag{10}$$

定理 4. 点集

$$\left(\left\{\frac{c_2k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{c_sk}{n}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant q \leqslant n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}} \tag{11}$$

有偏差

$$\varphi(q) = c(\mathscr{R}_s, \varepsilon)q^{-1+\varepsilon}. \tag{12}$$

§7. η 点集

命 α 为 s 次 PV 数，即 $\alpha > 1$，它的诸共轭数适合于

$$|\alpha^{(2)}| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha^{(s)}| < 1. \tag{1}$$

命

$$\rho = -\frac{\log |\alpha^{(s)}|}{\log \alpha}. \tag{2}$$

又命 α 所适合的既约方程为

$$x^s - a_{s-1}x^{s-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = 0. \tag{3}$$

命 $Q_n (n = 0, 1, \cdots)$ 为由下面递推公式定义的整数贯

$$\begin{aligned} &Q_0 = Q_1 = \cdots = Q_{s-2} = 0, \quad Q_{s-1} = 1, \\ &Q_n = a_{s-1}Q_{n-1} + \cdots + a_1 Q_{n-s-1} + a_0 Q_{n-s+1} + a_0 Q_{n-s}, \\ &\qquad n \geqslant s. \end{aligned} \tag{4}$$

又命

$$Q_n(j) = Q_{n+j-1} - a_{s-1}Q_{n+j-2} - \cdots - a_{s-j+2}Q_{n+1} - a_{s-j+1}Q_n, \quad 2 \leqslant j \leqslant s, \tag{5}$$

则

$$\left|\frac{Q_n(j)}{Q_n} - \omega_j\right| < c(\alpha)Q_n^{-1-\rho}, \quad 2 \leqslant j \leqslant s, \ n > M(\alpha), \tag{6}$$

此处 $\omega_j = \alpha^{j-1} - a_{s-1}\alpha^{j-2} - \cdots - a_{s-j+2}\alpha - a_{s-j+1} (2 \leqslant j \leqslant s)$(见 §2.2).

本节将证明

定理 1. 点集

$$\left(\left\{\frac{k}{Q_n}\right\}, \left\{\frac{Q_n(2)}{Q_n}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{Q_n(s)}{Q_n}k\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant Q_n \tag{7}$$

有偏差

$$\varphi(Q_n) = c(\alpha, \varepsilon)Q_n^{-\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}+\varepsilon}. \tag{8}$$

定理 2. 点集

$$\left(\left\{\frac{Q_n(2)}{Q_n}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{Q_n(s)}{Q_n}k\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant q \leqslant Q_n^{\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}} \tag{9}$$

有偏差

$$\varphi(q)=c(\alpha,\varepsilon)q^{-1+\varepsilon}. \tag{10}$$

由于 $1,\omega_2,\cdots,\omega_s$ 是 $R(\alpha)$ 的基底，所以由(6)，引理 5.1，定理 3.9.2 与定理 3.9.3 立即得定理 1 与定理 2.

点集(7)与(9)都是由 PV 数 α 决定的，我们称它为 α 点集，点集(9)是佳格点集．在 α 点集中，我们特别提出 η 点集，命 η 为方程

$$x^s-x^{s-1}-\cdots-x-1=0 \tag{11}$$

的最大实根，命 $F_n(=F_n^{(s)})$ 为由下面递推公式确定的整数贯

$$\begin{aligned}&F_0=F_1=\cdots=F_{s-2}=0,\quad F_{s-1}=1,\\&F_n=F_{n-1}+\cdots+F_{n-s+1}+F_{n-s},\quad n\geqslant s.\end{aligned} \tag{12}$$

又命

$$F_n(j)=F_{n+j-1}-F_{n+j-2}-\cdots-F_n,\quad 2\leqslant j\leqslant s, \tag{13}$$

则习知

$$\left|\frac{F_n(j)}{F_n}-\omega_j\right|\leqslant c(\eta)F_n^{-1-\frac{1}{2^s\log 2}-\frac{1}{2^{2s+1}}},\quad 2\leqslant j\leqslant s, \tag{14}$$

此处 $\omega_j=\eta^{j-1}-\eta^{j-2}-\cdots-\eta-1(2\leqslant j\leqslant s)$(见 § 2.4)，于是得到

定理 3. 点集

$$\left(\left\{\frac{k}{F_n}\right\},\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\cdots,\left\{\frac{F_n(s)}{F_n}k\right\}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant F_n \tag{15}$$

有偏差

$$\varphi(F_n)=c(\eta)F_n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{s+1}\log 2}-\frac{1}{2^{2s+3}}}. \tag{16}$$

定理 4. 点集

$$\left(\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\cdots,\left\{\frac{F_n(s)}{F_n}k\right\}\right),$$

$$1\leqslant k\leqslant q\leqslant F_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s+1}\log 2}+\frac{1}{2^{2s+2}}} \tag{17}$$

有偏差

$$\varphi(q)=c(\eta,\varepsilon)q^{-1+\varepsilon}. \tag{18}$$

当 $s=2$,即 α 为二次代数数时,则对于任何整数 $m\neq 0$ 皆有

$$\langle\alpha_m\rangle > \frac{c(\alpha)}{|m|}. \tag{19}$$

(见华罗庚[1], 第十章). 用(19)代替引理 5.1, 用定理 2.8.2 代替(14),则得

定理 5. 当 $s=2$ 时,(16)的右端可以换为 $c(\eta)F_n^{-1}(\log F_n)^2$.

当 $s=3$ 时,用定理 2.8.2 代替(14),则得

定理 6. 当 $s=3$ 时,(16)的右端可以换为 $c(\eta,\varepsilon)F_n^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$,(19)中 q 的范围可以改进为 $q\leqslant F_n^{\frac{3}{4}}$.

当 $s=2$ 时,点集(15)为完全佳格点集,下节我们给定理 5 一个另外证明.

§8. 二维情况

命

$$a_3,\ a_4,\ \cdots \tag{1}$$

为一个有界正整数贯,假定 $a_n\leqslant M(n=3,4,\cdots)$,命 q_1, q_2 是两个互素的正整数,不妨假定 $q_1\leqslant q_2$,定义

$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},\quad n\geqslant 3, \tag{2}$$

则 q_n 为一个递增贯,且满足

$$n-1\leqslant q_n\leqslant (M+1)q_{n-1},\quad n\geqslant 3. \tag{3}$$

定理 1. 存在一个正常数 $c=c(q_1,q_2,M)$,使方程

$$x_1+q_{n-1}x_2=q_ny,\quad 0<|x_1|\leqslant\frac{q_n}{2},$$

$$0<|x_2|\leqslant\frac{q_n}{2},\quad y\neq 0 \tag{4}$$

的解适合于

$$|x_1x_2|\geqslant cq_n, \tag{5}$$

$$|x_1y|\geqslant cq_{n-1}. \tag{6}$$

证. 显然当 $n=2,3$ 时,定理成立,今后假定 $n>3$ 并假定对于小于 n 的正整数,定理成立. 今往证明定理对于 n 亦成立.

1) x_2, y 必须同号，否则

$$\frac{q_n}{2} \geqslant |x_1| = |q_n y - q_{n-1}x_2| \geqslant q_n + q_{n-1},$$

此不可能.

2) 若 $|x_1| \leqslant \frac{1}{2} q_{n-1}$, $|y| \leqslant \frac{1}{2} q_{n-1}$, 则由(2), (4)得

$$x_1 + q_{n-1}x_2 = y(a_n q_{n-1} + q_{n-2}).$$

$$x_1 - q_{n-2}y = q_{n-1}(a_n y - x_2). \tag{7}$$

如果 $a_n y - x_2 = 0$, 则 $x_2 = a_n y$, 代入(7)得 $x_1 = q_{n-2}y$, 故由(3)得

$$x_1 x_2 = a_n q_{n-2} y^2 \geqslant q_{n-2} \geqslant \frac{1}{M+1} q_{n-1} \geqslant \frac{1}{(M+1)^2} q_n,$$

$$x_1 y = q_{n-2} y^2 \geqslant q_{n-2} \geqslant \frac{1}{M+1} q_{n-1},$$

取 $c \leqslant \frac{1}{(M+1)^2}$, 即得定理.

现在假定 $a_n y - x_2 \neq 0$, 由归纳法假定可知，存在正常数 $c = c(q_1, q_2, M)$ 使方程(7)的解适合于

$$|x_1 y| \geqslant c q_{n-1}, \quad |x_1(a_n y - x_2)| \geqslant c q_{n-2}. \tag{8}$$

由 1) 可知 y 与 $x_2 - a_n y$ 同号，因此由(8)得

$$|x_1 x_2| = |x_1(x_2 - a_n y) + x_1 a_n y| \geqslant c q_{n-2} + c a_n q_{n-1} = c q_n,$$

故得定理.

3) 若 $|x_1| \geqslant \frac{1}{2} q_{n-1}$, 则由(3)得

$$|x_1 x_2| \geqslant \frac{1}{2} q_{n-1} \geqslant \frac{1}{2(M+1)} q_n,$$

$$|x_1 y| \geqslant \frac{1}{2} q_{n-1}.$$

定理成立.

4) 若 $|y| \geqslant \frac{1}{2} q_{n-1}$, 则

$$|x_1y| \geqslant \frac{1}{2}q_{n-1},$$

$$\frac{1}{2}q_{n-1}q_n \leqslant |y|q_n \leqslant |x_1| + q_{n-1}|x_2| \leqslant \frac{1}{2}q_n + q_{n-1}|x_2|,$$

$$|x_2| \geqslant \frac{1}{2}q_n\left(1-\frac{1}{q_{n-1}}\right) \geqslant \frac{1}{4}q_n,$$

即得

$$|x_1x_2| \geqslant \frac{1}{4}q_n.$$

由 1), 2), 3), 4) 可知定理对于 n 亦成立，故由归纳法即得定理.

定理 2. 存在常数 $c = c(q_1, q_2, M)$ 使同余式

$$x_1 + q_{n-1}x_2 \equiv 0 \pmod{q_n} \tag{9}$$

在范围

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 < cq_n, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \tag{10}$$

中无解.

证. 由于 $(q_1, q_2) = 1$, 故由(2)可知 $(q_2, q_3) = 1$, 依次类推可得 $(q_{n-1}, q_n) = 1$ $(n = 4, 5, \cdots)$. 若 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ 为同余式(9)的解, 则由 $x_1 = 0$ 可得 $q_n | x_2$, 又由 $x_2 = 0$ 可得 $q_n | x_1$, 因此 $\bar{x}_1\bar{x}_2 \geqslant q_n$. 当 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ 时, 由定理 1 可知(9)的解皆满足 $\bar{x}_1\bar{x}_2 \geqslant cq_n$. 定理证完.

由定理 3.5.1 可得

定理 3. 点集

$$\left(\left\{\frac{k}{q_n}\right\}, \left\{\frac{q_{n-1}k}{q_n}\right\}\right) \quad 1 \leqslant k \leqslant q_n \tag{11}$$

有偏差

$$\varphi(q_n) = cq_n^{-1}(\log 3q_n)^2. \tag{12}$$

此处 $c = c(q_1, q_2, M)$.

特别取 $q_1 = q_2 = 1$, $a_n = 1$ $(n = 3, 4, \cdots)$, 则贯 q_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 就是二维 Fibonacci 贯 $F_n (= F_n^{(2)})$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 故由定理 3 即得定理 7.5.

§9. 完全佳格点集

本节将证明

定理 1. 命 $p > e^s$, 则存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使点集

$$\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant p \tag{1}$$

有偏差

$$\varphi(p) < \frac{(s+1)2^{2s}}{\pi^s} p^{-1}(\log 8p)^s. \tag{2}$$

定理 2. 命 $p > e^s$ 及 n 为整数适合于 $1 \leqslant n \leqslant p$, 则存在整矢量 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p)$ 使点集

$$\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right), \quad 0 \leqslant k < n \tag{3}$$

有偏差

$$\varphi(n) < \frac{(s+2)2^{2(s+1)}}{\pi^{s+1}} n^{-1}(\log 8p)^{s+1}. \tag{4}$$

证明之前先证下列二引理.

引理 1. 命 $\mathbf{a}$ 为整矢量及 q 为整数 >1, 若 $(a_i, q) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, 则对于任何正整数 r 皆有

$$\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 (\bmod q) \\ |m_i| \leqslant qr}}{}' \frac{1}{\|\pi \mathbf{m}\|} - \sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}^{(0)}) \equiv 0 (\bmod q) \\ -\frac{q}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{q}{2}}} \frac{1}{\|\pi \mathbf{m}^{(0)}\|} < \frac{s 2^s (\log 20qr)^s}{\pi^s q}. \tag{5}$$

证. 若 $\mathbf{m}^{(0)}$ 是一个适合于

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}^{(0)}) = a_1 m_1^{(0)} + \cdots + a_s m_s^{(0)} \equiv 0 (\bmod q),$$

$$-\frac{q}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{q}{2} \quad (1 \leqslant i \leqslant s) \tag{6}$$

的解, 则

$$m_1 = m_1^{(0)} + q l_1, \cdots, \quad m_s = m_s^{(0)} + q l_s \tag{7}$$

也是同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 (\bmod q) \tag{8}$$

的解. 反之, (8)的任何解都可以表示成(7)的形式. 由于 (a_i, q)

$=1(1\leqslant i\leqslant s)$, 所以在同余式(6)中，当 $m_1^{(0)},\cdots m_s^{(0)}$ 中有 $s-1$ 个给出后,则其它一个就被唯一确定了. 由引理 3.3.1 得

$$\sum_{-\frac{q}{2}<m\leqslant\frac{q}{2}}\sum_{l=-r}^{r}\frac{1}{\pi(m+lq)}\leqslant 1+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\left[q\left(r+\frac{1}{2}\right)\right]}\frac{1}{m}<\frac{2}{\pi}\log 20qr$$

及当 $-\frac{q}{2}<m\leqslant\frac{q}{2}$ 时

$$\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{\pi(m+lq)}\leqslant\frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{r}\frac{1}{q\left(l-\frac{1}{2}\right)}<\frac{2}{\pi q}\log 20r,$$

所以

$$\left|\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod q)\\|m_i|\leqslant qr}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}-\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}^{(0)})\equiv 0(\bmod q)\\-\frac{q}{2}<m_i^{(0)}\leqslant\frac{q}{2}}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}^{(0)}\|}\right|$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}^{(0)})\equiv 0(\bmod q)\\-\frac{q}{2}<m_\nu^{(0)}\leqslant\frac{q}{2}}}\left(\sum_{l_\nu=-r}^{r}{}'\frac{1}{\pi(m_\nu^{(0)}+l_\nu q)}\right)$$

$$\times\prod_{\substack{\mu=1\\\mu\neq\nu}}^{q}\left(\sum_{l_\mu=-r}^{r}\frac{1}{\pi(m_\mu^{(0)}+l_\mu q)}\right)$$

$$<s\left(\frac{2}{\pi}\right)^s q^{-1}(\log 20qr)^s.$$

引理证完.

引理 2. 当 $p>6$ 时,存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使

$$\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p)\\|m_i|<\frac{p}{2}}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}<\frac{(s-1)2^s}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s.$$

证. 特别取 $\mathbf{a}=(1,a,\cdots,a^{s-1})$, 此处 a 为整数,并记

$$\Lambda(a)=\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p)\\|m_i|<\frac{p}{2}}}{}'\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|},\tag{9}$$

则由引理 3.1 可知

$$\min_{1<a\leqslant p}\Lambda(a)\leqslant\frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p}\Lambda(a)=p^{-1}\sideset{}{'}\sum_{|m_i|<\frac{p}{2}}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\sum_{\substack{1<a\leqslant p\\(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}}1$$

$$\leqslant(s-1)p^{-1}\left(\sum_{|m|<\frac{p}{2}}\frac{1}{\overline{\pi m}}\right)^{s}<(s-1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}p^{-1}(\log 8p)^{s},$$

故存在整数 a 使

$$\Lambda(a)<(s-1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s}p^{-1}(\log 8p)^{s}.$$

引理证完.

定理 1 的证明. 取 $\mathbf{a}$ 适合于引理 2 的要求, 则由引理 1 与引理 2 可知

$$\sideset{}{'}\sum_{|m_i|\leqslant p^2}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{p}}\right|=\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)\\|m_i|\leqslant p^2}}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$<\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}^{(0)})\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)\\|m_i^{(0)}|<\frac{p}{2}}}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}^{(0)}\|}+\frac{s2^{2s}(\log 8p)^{s}}{\pi^{s}p}$$

$$<\frac{(s-1)2^{s}(\log 8p)^{s}}{\pi^{s}p}+\frac{s2^{2s}(\log 8p)^{s}}{\pi^{s}p}.$$

在定理 3.3.1 中置 $r=1$, $\eta=p^{-1}$ 与 $h=p^{2}$, 则得

$$\varphi(p)<\frac{s2^{2s}(\log 8p)^{s}}{\pi^{s}p}+\frac{(s-1)2^{s}(\log 8p)^{s}}{\pi^{s}p}$$

$$+\frac{s2^{2s-1}}{\pi^{s+1}p}(\log 8p)^{s-1}+\frac{5s+6}{p}<\frac{(s+1)2^{2s}}{\pi^{s}}p^{-1}(\log 8p)^{s}.$$

定理证完.

定理 2 的证明. 取 $\mathbf{a}=(1, a, \cdots, a^{s})$ 为使定理 1 成立的 $s+1$ 维矢量, 则当 $\boldsymbol{\gamma}\in G_s$ 时, 满足

$$\left\{\frac{ak}{p}\right\}<\gamma_1, \cdots, \left\{\frac{a^{s}k}{p}\right\}<\gamma_s, \quad 0\leqslant k<n \tag{10}$$

之整数 k 之个数 $N_n(\boldsymbol{\gamma})$ 与满足

$$\left\{\frac{k}{p}\right\}<\frac{n}{p}, \left\{\frac{ak}{p}\right\}<\gamma_1, \cdots, \left\{\frac{a^{s}k}{p}\right\}<\gamma_s, \quad 1\leqslant k\leqslant p \tag{11}$$

之整数 k 之个数相等，所以由定理 1 可知

$$\left|p^{-1}N_n(\boldsymbol{\gamma})-\frac{n}{p}|\boldsymbol{\gamma}|\right|<\frac{(s+2)2^{2(s+1)}}{\pi^{s+1}}p^{-1}(\log 8p)^{s+1}.$$

上式之两端各乘以 $\frac{p}{n}$ 即得定理.

由引理 2 可知适合于定理 1 要求的整矢量 $\mathbf{a}$ 是由 $\Lambda(a)$ 取极小值的整数 a 而构造出来的. 今往求出 $\Lambda(a)$ 的表达式，为此先证下面的引理.

引理 3. 命 q 为正整数及 x 适合于 $0<x<1$，则

$$1-\frac{2}{\pi}\log(2\sin\pi x)=\sum_{|m|\leqslant q}{}'\frac{e^{2\pi imx}}{\pi m}+\frac{\vartheta}{\pi q\langle x\rangle},\qquad(12)$$

此处及以后 ϑ 皆表示适合于 $|\vartheta|\leqslant 1$ 的数.

证. 当 $0\leqslant r<1$ 时有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m e^{2\pi imx}}{m}=-\log(1-re^{2\pi ix}).$$

由于级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}$ 收敛，所以

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}=-\log(1-e^{2\pi ix}).$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi imx}}{\pi m}&=1+\pi^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}+\pi^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi imx}}{m}\\&=1-\pi^{-1}(\log(1-e^{2\pi ix})+\log(1-e^{-2\pi ix}))\\&=1-\pi^{-1}\log(2-2\cos 2\pi x)=1-\frac{2}{\pi}\log(2\sin\pi x).\end{aligned}$$

即得

$$1-\frac{2}{\pi}\log(2\sin\pi x)=\sum_{|m|\leqslant q}{}'\frac{e^{2\pi imx}}{\pi m}+R,$$

此处

$$R=\sum_{m=q}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\pi m}+\sum_{m=q}^{\infty}\frac{e^{-2\pi imx}}{\pi m}.$$

由恒等式

$$\frac{e^{2\pi imx}}{m}=\frac{1}{e^{2\pi ix}-1}\left(\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m+1}-\frac{e^{2\pi imx}}{m}+\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m(m+1)}\right)$$

可得

$$\left|\sum_{m=q}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\pi m}\right|=\frac{1}{\pi|e^{2\pi ix}-1|}\left|-\frac{e^{2\pi iqx}}{q}+\sum_{m=q}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m(m+1)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi\sin\pi x}\left(\frac{1}{q}+\sum_{m=q}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right)=\frac{1}{q\pi\sin\pi x}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi q\langle x\rangle},$$

所以

$$R=\frac{\vartheta}{\pi q\langle x\rangle}.$$

引理证完.

当 $1\leqslant a,\ k\leqslant p$ 时有

$$\left|1-\frac{2}{\pi}\log\left(2\sin\pi\left\{\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\}\right)\right|\leqslant 1+\frac{2}{\pi}\left|\log\left(2\sin\frac{\pi}{p}\right)\right|$$

$$\leqslant 1+\frac{2}{\pi}\log p<\frac{2}{\pi}\log 8p,$$

所以由引理 3 可知

$$\prod_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{2}{\pi}\log\left(2\sin\pi\left\{\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\}\right)\right)=\sum_{|m_i|<\frac{p}{2}}\frac{e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{p}}}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$+\vartheta\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s-1}(\log 8p)^{s-1}\frac{2}{\pi(p+1)}\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{\left\langle\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\rangle}.$$

由引理 3.3.1 可知

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\left\langle\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\rangle}=2p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k}<2p\log 8p,$$

因此

$$\Lambda(a)=p^{-1}\sum_{k=1}^{p}\sum_{|m_i|<\frac{p}{2}}\frac{e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{p}}}{\|\pi\mathbf{m}\|}-1$$

$$= p^{-1}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{|m_i|<\frac{p}{2}}\frac{e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{p}}}{\|\pi\mathbf{m}\|}-1+p^{-1}\sum_{|m_i|<\frac{p}{2}}\frac{1}{\|\pi\mathbf{m}\|}$$

$$= p^{-1}\sum_{k=1}^{p-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{2}{\pi}\log\left(2\sin\pi\left\{\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\}\right)\right)$$

$$+\frac{\vartheta 2^{s+1}}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s-1+\vartheta\left(\frac{2}{\pi}\right)^s p^{-1}(\log 8p)^s$$

$$= p^{-1}\sum_{k=1}^{p-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{2}{\pi}\log\left(2\sin\pi\left\{\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\}\right)\right)$$

$$-1+3\vartheta\left(\frac{2}{\pi}\right)^s(\log 8p)^s p^{-1}. \tag{13}$$

当 $a=1,2,\cdots,p-1$ 时，由 (13) 可以算出 $\Lambda(a)$ 的极小值，或求出 a 适合于

$$\sum_{k=1}^{p-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(1-\frac{2}{\pi}\log\left(2\sin\pi\left\{\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right\}\right)\right)\leqslant p+O((\log p)^s), \tag{14}$$

则由此即可得出适合定理 1 要求的矢量 $\mathbf{a}=(1,a,\cdots,a^{s-1})$.

易知给了 p 之后，算出 a 的计算量是 $O(p^2)$，所以本节给出的点集的优点在于偏差很小，且便于使用. 但缺点在于定出 a 的计算量太大. 当 s 与 p 较大时，计算量虽可适当降低，但仍很大而难于实现(参看第八章).

附记

对于 $\varepsilon>0$，在定理 3.3.1 中，取 $r=r(\varepsilon)$ 充分大，$\eta=p^{-1}$ 及 $h=[p^{1+r^{-1}}]$，则当 $p>c(s,\varepsilon)$ 时，(1)与(3)的偏差可以分别改进为

$$\varphi(p)<\left(\frac{(2s-1)2^s}{\pi^s}+\varepsilon\right)p^{-1}(\log p)^s \tag{15}$$

与

$$\varphi(n)<\left(\frac{(2s+1)2^{s+1}}{\pi^{s+1}}+\varepsilon\right)n^{-1}(\log p)^{s+1}. \tag{16}$$

注　释

§2. 首先是 Van der Corput, J. G.[1] 提出了一致分布点集

$\left(\frac{k}{n}, \varphi_2(k)\right)(1 \leqslant k \leqslant n)$. 由 Hammersley, J. M.[1] 与 Halton, J. H.[1] 分别建议将这一分布推广为$\left(\frac{k}{n}, \varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_{s-1}}(k)\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 与 $(\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k))(k = 1, 2, \cdots)$. 定理 1 则是 Halton, J. H. 证明的.

§3. 方幂点集 $\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant p^2)$ 与 $\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant p)$ 是 Коробов, Н. М.[1,7] 首先引进的. 方幂点集$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{ak}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a^{s-1}k}{p}\right\}\right)(1 \leqslant a, k \leqslant p)$ 则是华罗庚与王元[3,7]提出的. 关于定理 2,3 参看 Hlawka, E. [4] 与 Коробов, Н. М. [8].

§4. 形为$(\{\gamma_1 k\}, \cdots, \{\gamma_s k\})(k = 1, 2, \cdots)$的贯最早见于 Weyl, H. [1]. 而 Richtmyer, R. D.[1] 与 Peck, L. G.[1] 等人曾建议用它来近似计算重积分. 关于定理1, 参看 Хинчин, А. Я. [1], Бахвалов, Н. С. [1].

§8. 二维 η 点集是华罗庚与王元[1,2]、Бахвалов, Н. С.[1] 首先独立引进的, 并用来处理数值积分问题 (参看 Haber, S. 与 Osgood, C. F. [1] Zaremba, S. K. [1]). 关于二维 η 点集的偏差, Zaremba, S. K.[1] 证明了更强的结果 $\varphi(F_n) = O(F_n^{-1} \log 3F_n)$.

§9. 佳格点点集$\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant p)$ 是 Коробов, Н. М.[2] 与 Hlawka, E.[3] 独立引进的. 其后, Коробов, Н. М.[4] 又指出佳格点集可以取$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{ak}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a^{s-1}k}{p}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant p)$的形式. 关于定理1 参看 Коробов, Н. М. [7], Hlawka, E. [4].

与定理 1 相类似, Niederreiter, H[3] 证明了, 对于素数 p, 存在原根 $g \bmod p$, 使点集$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{gk}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{g^{s-1}k}{p}\right\}\right)(1 \leqslant k \leqslant p)$ 有偏差 $\varphi(p) = O(p^{-1}(\log p)^s \log\log p)$.

第五章　一致分布与数值积分

§1. 囿变函数类

命

$$(\sigma)\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = 1,$$
$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1 \tag{1}$$

为 G_2 的任何分割，命 $f(x, y)$ 为 G_2 上定义的函数及

$$\Delta_{10}f(x_i, y) = f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y),$$
$$\Delta_{01}f(x, y_j) = f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j),$$
$$\Delta_{11}f(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) - f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_{j+1}).$$

若变差

$$V_\sigma = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}f(x_i, y_j)| + \sum_{i=0}^{l-1}|\Delta_{10}f(x_i, 1)| + \sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{01}f(1, y_j)| \tag{2}$$

有一与分割(σ)无关的上界，则称 f 为 Hardy 与 Krause 意义之下的囿变函数. V_σ 的确上界称为 f 的全变差，记为 $V(f)$. 这种函数的全体记为 B_2，类似地，可以定义 $B_s(s > 2)$.

如果在

$$0 \leqslant x < x' \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y < y' \leqslant 1$$

上常有

1) $f(x', y) - f(x, y)$ 同号或等于 0,

2) $f(x, y') - f(x, y)$ 同号或等于 0.

3) $f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')$ 同号或等于 0,

则称 f 为广义单调函数，这种函数的全体记为 M_2. 类似地，可以

定义 $M_s(s>2)$.

若 $f\in M_2$, 则

$$V_\sigma=\left|\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_{11}f(x_i,y_j)\right|+\left|\sum_{i=0}^{l-1}\Delta_{10}f(x_i,1)\right|$$

$$+\left|\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_{01}f(1,y_j)\right|=|f(0,0)-f(0,1)$$

$$-f(1,0)+f(1,1)|+|f(1,1)-f(0,1)|$$

$$+|f(1,1)-f(1,0)|,$$

所以 $f\in B_2$, 即得 $M_2\subset B_2$. 类似地,可以证明 $M_s\subset B_s(s>2)$.

定理 1. (分解定理). 每一 B_s 的函数皆可以表为两个 M_s 的函数之差.

证.我们仅对 $s=2$ 来证明这一定理,而当 $s>2$ 时,证明是完全类似的.

1) 对于 G_s 的任何分割 (σ), 考虑 V_σ 的一部分

$$V_1=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}f(x_i,y_j)|.$$

将 x_0, y_0 分别换为变数 x, y, 用 $P(x,y)$ 表示上面和式中适合 $\Delta_{11}f(x_i,y_j)\geqslant 0$ 之诸项之和, 而用 $N(x,y)$ 表示适合 $\Delta_{11}f(x_i,y_j)<0$ 之诸项之和,则得

$$P(x,y)-N(x,y)=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_{11}f(x_i,y_j)$$

$$=f(1,1)-f(x,1)-f(1,y)+f(x,y),$$

即

$$f(x,y)=P(x,y)-N(x,y)+f(x,1)+f(1,y)-f(1,1). \tag{3}$$

易知函数 $P(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 有下述性质:

$$\Delta_{10}P\leqslant 0,\quad \Delta_{01}P\leqslant 0,\quad \Delta_{11}P\geqslant 0,$$

$$\Delta_{10}N\leqslant 0,\quad \Delta_{01}N\leqslant 0,\quad \Delta_{11}N\geqslant 0, \tag{4}$$

所以 P 与 N 都是广义单调函数.

2) $f(x,1)$ 与 $f(1,y)$ 都是单变数的囿变函数, 习知它们都是

两个单调函数之差，即

$$f(x,1)=P_1(x,1)-N_1(x,1),\quad f(1,y)=P_2(1,y)-N_2(1,y),\tag{5}$$

此处 P_1, N_1, P_2, N_2 都是递减函数(我们也可以仿照 1)加以定义).

将(5)代入(3)即得

$$\begin{aligned}&f=F-G,\quad F=-(N+N_1+N_2)-f(1,1),\\&G=-(P+P_1+P_2).\end{aligned}\tag{6}$$

由(4),(5),(6)可知

$$\begin{aligned}&\Delta_{10}F\geqslant 0,\quad \Delta_{01}F\geqslant 0,\quad \Delta_{11}F\leqslant 0,\\&\Delta_{10}G\geqslant 0,\quad \Delta_{01}G\geqslant 0,\quad \Delta_{11}G\leqslant 0,\end{aligned}\tag{7}$$

即 F 与 G 都是广义单调函数. 定理证完.

如果在

$$0\leqslant x<x'\leqslant 1,\quad 0\leqslant y<y'\leqslant 1$$

时常有绝对常数 L 使

1) $|f(x',1)-f(x,1)|\leqslant L(x'-x)$,

2) $|f(1,y')-f(1,y)|\leqslant L(y'-y)$,

3) $|f(x,y)-f(x',y)-f(x,y')+f(x',y')|$
$\leqslant L(x'-x)(y'-y)$,

则称 f 适合广义 Lipschitz 条件，这种函数的全体记为 L_2. 类似地,可以定义 $L_s(s>2)$.

若 $f\in L_2$, 则

$$\begin{aligned}V_\sigma=&\left|\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_{11}f(x_i,y_j)\right|+\left|\sum_{i=0}^{l-1}\Delta_{10}f(x_i,1)\right|\\&+\left|\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_{01}f(1,y_j)\right|\leqslant L\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)\\&+L\sum_{i=0}^{l-1}(x_{i+1}-x_i)+L\sum_{j=0}^{m-1}(y_{j+1}-y_j)=3L.\end{aligned}$$

所以 $f\in B_2$, 即得 $L_2\subset B_2$. 类似地,可以证明
$L_s\subset B_s(s>2)$.

由定理 1 的证明不难看出

定理 2. 适合广义 Lipschtz 条件的函数可以表为两个适合广义 Lipschtz 条件的广义单调函数之差.

又若 $f(\mathbf{x})$ 适合

$$|f| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqslant L, \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant L, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s, \cdots,$$
$$\left|\frac{\partial^s f}{\partial x_1 \cdots \partial x_s}\right| \leqslant L, \tag{8}$$

则显然 $f \in L_s$.

§ 2. 一致分布与数值积分

定理 1. 命 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为有偏差 $\varphi(n)$ 的点集. 若 $f \in B_s$, 则

$$\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_n(k))\right| \leqslant V(f)\varphi(n). \tag{1}$$

证. 我们仅对 $s = 2$ 来证明本定理. 当 $s > 2$ 时, 证明是完全类似的.

1) 因 $f \in B_2$, 所以由定理 1.1 可以将 f 表为

$$f = F - G,$$
$$F = -(N + N_1 + N_2) - f(1, 1),$$
$$G = -(P + P_1 + P_2), \tag{2}$$

此处 F 与 G 为广义单调函数且满足

$$\Delta_{10} F \geqslant 0, \quad \Delta_{01} F \geqslant 0, \quad \Delta_{11} F \leqslant 0,$$
$$\Delta_{10} G \geqslant 0, \quad \Delta_{01} G \geqslant 0, \quad \Delta_{11} G \leqslant 0,$$
$$\Delta_{10} P_2 = \Delta_{10} N_2 = \Delta_{01} P_1 = \Delta_{01} N_1 = 0,$$
$$\Delta_{11} P_1 = \Delta_{11} N_1 = \Delta_{11} P_2 = \Delta_{11} N_2 = 0,$$
$$P(x, 1) = N(x, 1) = P(1, y) = N(1, y) = 0.$$
$$P_1(1, 1) = N_1(1, 1) = P_2(1, 1) = N_2(1, 1) = 0. \tag{3}$$

落入小区域

$$\frac{i-1}{q} \leqslant x < \frac{i}{q}, \quad \frac{j-1}{q} \leqslant y < \frac{j}{q}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant q, \quad (4)$$

的点 $P_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的个数为

$$N_n\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right) - N_n\left(\frac{i-1}{q}, \frac{j}{q}\right) - N_n\left(\frac{i}{q}, \frac{j-1}{q}\right) + N_n\left(\frac{i-1}{q}, \frac{j-1}{q}\right),$$

由(3)可知在(4)中，$F(x, y)$ 的值不超过 $F\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right)$，所以

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(x_1^{(n)}(k), x_2^{(n)}(k)) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \Bigg(N_n\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right) \\
&\quad - N_n\left(\frac{i-1}{q}, \frac{j}{q}\right) - N_n\left(\frac{i}{q}, \frac{j-1}{q}\right) \\
&\quad + N_n\left(\frac{i-1}{q}, \frac{j-1}{q}\right)\Bigg) F\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} N_n\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right)\Bigg(F\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right) - F\left(\frac{i+1}{q}, \frac{j}{q}\right) \\
&\quad - F\left(\frac{i}{q}, \frac{j+1}{q}\right) + F\left(\frac{i+1}{q}, \frac{j+1}{q}\right)\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{q-1} N_n\left(\frac{i}{q}, 1\right)\left(F\left(\frac{i}{q}, 1\right) - F\left(\frac{i+1}{q}, 1\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{q-1} N_n\left(1, \frac{j}{q}\right)\left(F\left(1, \frac{j}{q}\right) - F\left(1, \frac{j+1}{q}\right)\right) \\
&\quad + F(1, 1).
\end{aligned}$$

因

$$N_n(x, y) = xyn + \vartheta\varphi(n)n,$$

此处及以后 ϑ 皆表示绝对值不超过 1 的数，所以

$$\begin{aligned}
S_1 \leqslant \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} \left(\frac{ij}{q^2} + \vartheta\varphi(n)\right)\Bigg(F\left(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}\right) - F\left(\frac{i+1}{q}, \frac{j}{q}\right) \\
- F\left(\frac{i}{q}, \frac{j+1}{q}\right) + F\left(\frac{i+1}{q}, \frac{j+1}{q}\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{q-1}\left(\frac{i}{q}+\vartheta\varphi(n)\right)\left(F\left(\frac{i}{q},1\right)-F\left(\frac{i+1}{q},1\right)\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{q-1}\left(\frac{j}{q}+\vartheta\varphi(n)\right)\left(F\left(1,\frac{j}{q}\right)-F\left(1,\frac{j+1}{q}\right)\right)$$

$$+F(1,1)\leqslant\frac{1}{q^2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}F\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)+V(F)\varphi(n).$$

命 $q\to\infty$，则得

$$S_1\leqslant\int_0^1\int_0^1 F(x_1,x_2)dx_1dx_2+V(F)\varphi(n).$$

类似地，可得

$$S_1\geqslant\int_0^1\int_0^1 F(x_1,x_2)dx_1dx_2-V(F)\varphi(n),$$

因此

$$S_1=\int_0^1\int_0^1 F(x_1,x_2)dx_1dx_2+\vartheta V(F)\varphi(n). \tag{5}$$

同理可得

$$S_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}G(x_1^{(n)}(k),x_2^{(n)}(k))$$

$$=\int_0^1\int_0^1 G(x_1,x_2)dx_1dx_2+\vartheta V(G)\varphi(n). \tag{6}$$

2）对于任何分割 (σ)，由(3)得

$$\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}f(x_i,y_j)|=P(0,0)-P(0,1)-P(1,0)$$

$$+P(1,1)+N(0,0)-N(0,1)-N(1,0)+N(1,1)$$

$$=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}P(x_i,y_j)|+\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}N(x_i,y_j)|$$

$$=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}F(x_i,y_j)|+\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{11}G(x_i,y_j)|. \tag{7}$$

类似地得

$$\sum_{i=0}^{l-1}|\Delta_{10}f(x_i,1)|=\sum_{i=0}^{l-1}|\Delta_{10}F(x_i,1)|+\sum_{i=0}^{l-1}|\Delta_{10}G(x_i,1)| \tag{8}$$

与

$$\sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{01}f(1, y_j)| = \sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{01}F(1, y_j)| + \sum_{j=0}^{m-1}|\Delta_{01}G(1, y_j)|. \tag{9}$$

将(7),(8),(9)两端相加即得

$$V(f) = V(F) + V(G). \tag{10}$$

故将(5),(6)相减即得

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(n)}(k), x_2^{(n)}(k))\right| \leqslant V(f)\varphi(n).$$

定理证完.

作为定理 1 的逆,我们有下列定理.

定理 2. 若(1)式对所有$f \in B_s$皆成立,则$P_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$为有偏差不超过 $\varphi(n)$ 的点集.

证. 取 $f(\mathbf{x})$ 为区域

$$(\mathscr{R})\ 0 \leqslant x_1 < \gamma_1, \cdots, \quad 0 \leqslant x_s < \gamma_s, \quad \boldsymbol{\gamma} \in G_s \tag{11}$$

的特征函数,即

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \mathbf{x} \in \mathscr{R}, \\ 0, & \text{当 } \mathbf{x} \bar{\in} \mathscr{R}, \end{cases}$$

则易知 $V(f) \leqslant 1$,

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathscr{R}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = |\boldsymbol{\gamma}|$$

及

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_n(k)) = \frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma}),$$

故(1)式即为

$$\left|\frac{1}{n}N_n(\boldsymbol{\gamma}) - |\boldsymbol{\gamma}|\right| \leqslant \varphi(n).$$

定理证完.

若对于所有整数 $q \geqslant 1$ 常有

$$\frac{1}{q^s}\sum_{l_1=1}^{q}\cdots\sum_{l_s=1}^{q} q^{\delta_{l_1,q}+\cdots+\delta_{l_s,q}}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{l_1}{q}, \cdots, \frac{l_s}{q}\right)\right.$$

$$-\frac{l_1\cdots l_s}{q^s}\Big|\leqslant\psi(n),\tag{12}$$

则称点集 $P_n(k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 为有平均偏差 $\psi(n)$ 的点集.

定理 3. 若 $f\in L_s$, 则

$$\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P_n(k))\right|\leqslant L\psi(n).\tag{13}$$

证. 我们仍假定 $s=2$. 因

$$|f(x',y)-f(x,y)|\leqslant|f(x',y)-f(x,y)-f(x',1)$$
$$+f(x,1)|+|f(x',1)-f(x,1)|\leqslant 2L|x'-x|$$

及

$$|f(x,y')-f(x,y)|\leqslant 2L|y'-y|,$$

所以 f 在 G_2 上一致连续，因此对于任意 $\varepsilon>0$, 当 q 充分大时有

$$S_1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(n)}(k),x_2^{(n)}(k))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\left(N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)\right.$$
$$-N_n\left(\frac{i-1}{q},\frac{j}{q}\right)-N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j-1}{q}\right)$$
$$\left.+N_n\left(\frac{i-1}{q},\frac{j-1}{q}\right)\right)\left(f\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)+\delta\right),$$

此处 $|\delta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 命 S_2 表示 S_1 中与 δ 无关之各项之和，因

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\left(N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)-N_n\left(\frac{i-1}{q},\frac{j-1}{q}\right)\right.$$
$$\left.-N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j-1}{q}\right)+N_n\left(\frac{i-1}{q},\frac{j-1}{q}\right)\right)=1,$$

所以

$$|S_1-S_2|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{14}$$

由分部求和得

$$S_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=1}^{q-1}N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)\left(f\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)-f\left(\frac{i+1}{q},\frac{j}{q}\right)\right.$$
$$\left.-f\left(\frac{i}{q},\frac{j+1}{q}\right)+f\left(\frac{i+1}{q},\frac{j+1}{q}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q-1}N_n\left(\frac{i}{q},1\right)\left(f\left(\frac{i}{q},1\right)-f\left(\frac{i+1}{q},1\right)\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q-1}N_n\left(1,\frac{j}{q}\right)\left(f\left(1,\frac{j}{q}\right)-f\left(1,\frac{j+1}{q}\right)\right)$$

$$+f(1,1).$$

命

$$S_3=\frac{1}{q^2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}f\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right),$$

则当 q 充分大时有

$$\begin{aligned}|S_2-S_3|\leqslant&\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)-\frac{ij}{q^2}\right|\left|f\left(\frac{i}{q},\frac{j}{q}\right)\right.\\&\left.-f\left(\frac{i+1}{q},\frac{j}{q}\right)-f\left(\frac{i}{q},\frac{j+1}{q}\right)+f\left(\frac{i+1}{q},\frac{j+1}{q}\right)\right|\\&+\sum_{i=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(\frac{i}{q},1\right)-\frac{i}{q}\right|\left|f\left(\frac{i}{q},1\right)-f\left(\frac{i+1}{q},1\right)\right|\\&+\sum_{j=1}^{q-1}\left|\frac{1}{n}N_n\left(1,\frac{j}{q}\right)-\frac{j}{q}\right|\left|f\left(1,\frac{j}{q}\right)-f\left(1,\frac{j+1}{q}\right)\right|\\&\leqslant L\psi(n).\end{aligned}\tag{15}$$

及

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2-S_3\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{16}$$

因此由(14),(15),(16)得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2-S_1\right|&\leqslant|S_1-S_2|+|S_2-S_3|\\&+\left|S_3-\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\leqslant L\psi(n)+\varepsilon,\end{aligned}$$

因 ε 为任意的,故得定理.

由以上诸定理可见,我们可以用一致分布点集贯 $P_{n_l}(k)(n_1<n_2<\cdots)$ 上函数值的算术平均

$$\frac{1}{n_l}\sum_{k=1}^{n_l}f(P_{n_l}(k))$$

来近似计算定积分

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

每个一致分布点集贯都对应一种数值积分方法. 误差与点集贯 $P_{n_l}(k)(n_1 < n_2 < \cdots)$ 的偏差密切相关,除考虑点集贯的偏差外,更要考虑 $P_{n_l}(k)$ 是否便于计算应用等因素. 我们推荐格点集(具体使用格点集时,可以查附表).

附记

由定理 1 的证明可见, 将点集 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的偏差 $\varphi(n)$ 的定义修改为

$$\varphi(n) = \sup_{\mathbf{r} \in G_s} \left| \frac{N_n(\mathbf{r})}{n} - |\mathbf{r}| \right|,$$

此处 $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_s)$ 为有理矢量,定理 1 仍成立.

§3. 数值积分误差的下界估计

由定理 2.2 与定理 3.10.1 可知,对于任何点集 $P_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n)$, 关系式

$$\left| \int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_n(k)) \right|$$
$$\leqslant V(f) 2^{-2s-4}(s-1)^{-\frac{s-1}{2}} n^{-1} (\log n)^{\frac{s-1}{2}} \quad (1)$$

不能对所有的 $f \in B_s$ 都成立. 即用函数在 n 个点的值的算术平均来逼近积分, 误差主阶不能比 $O(n^{-1})$ 更好. 本节将证明, 若将函数类 B_s 换为更小的函数类,例如适合(1.8)的全体函数, 数值积分公式的误差亦不能改好了.

在区域

$$a_k \leqslant x_k < a_k + \delta, \quad 1 \leqslant k \leqslant s \quad (2)$$

上定义函数

$$g(\mathbf{x}) = \delta^{-(2s-1)(q+\lambda)} \prod_{k=1}^{s} ((x_k - a_k)(a_k + \delta - x_k))^{q+\lambda}, \quad (3)$$

此处 q 为整数, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 及 $\delta > 0$, 在区域(2)之外定义

$$g(\mathbf{x}) = 0, \tag{4}$$

这函数有以下一些性质:

1) $g(\mathbf{x})$ 在整个空间处处有 q 次连续偏微商.

2) 当 $1 \leqslant k \leqslant s$, $i_j \geqslant 0 (1 \leqslant j \leqslant s)$ 及 $i_1 + \cdots + i_s = q$ 时有

$$\lim_{y_k \to x_k} \frac{1}{|y_k - x_k|^\lambda} \left| \frac{\partial^q g(x_1, \cdots, y_k, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial y_k^{i_k} \cdots \partial x_s^{i_s}} - \frac{\partial^q g(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_k^{i_k} \cdots \partial x_s} \right| \tag{5}$$

存在,且不超过 $c(q, \lambda, s)$.

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

$$= \delta^{-(2s-1)(q+\lambda)} \prod_{k=1}^{s} \int_{a_k}^{a_k+\delta} ((x_k - a_k)(a_k + \delta - x_k))^{q+\lambda} dx_k$$

$$= \delta^{s+q+\lambda} \left(\int_0^1 (t(1-t))^{q+\lambda} dt \right) = c(q, \lambda, s) \delta^{s+q+\lambda}.$$

命 $n_0 = [(2n)^{\frac{1}{s}}] + 1 (> (2n)^{\frac{1}{s}})$, 把 G_s 的每一边分为 n_0 份,共得 $n_0^s (> 2n)$ 个形如(2)的小立方体(若不等式(2)的右端为 1,则应将"$<$"改为"$\leqslant$"),其边长为 n_0^{-1}.

任意给定 G_s 中的 n 个点 $P_n(k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则至少有 n 个小立方体不包含这些点,命之为

$$Q_1, \cdots, Q_n. \tag{6}$$

不属于 $Q_1, \cdots, Q_n$ 的 G_s 的部分以 R 表示, Q_k 可以写成为

$$Q_k:\ a_i^{(k)} \leqslant x_i < a_i^{(k)} + n_0^{-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{7}$$

定义函数

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} n_0^{(2s-1)(q+\lambda)} \prod\limits_{i=1}^{s} ((x_i - a_i^{(k)})(a_i^{(k)} + n_0^{-1} - x_i))^{q+\lambda}, & \text{当 } \mathbf{x} \in Q_k, \\ 0, \quad \text{当 } \mathbf{x} \in R. \end{cases} \tag{8}$$

因 $Q_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 中不包含任何点 $P_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 所以

$$f(P_n(k)) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{9}$$

又由 3) 可知

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant c(q, \lambda, s)n \cdot n_0^{-(s+q+\lambda)} \geqslant c(q, \lambda, s)n^{-\frac{q+\lambda}{s}}. \quad (10)$$

故得

定理 1. 任取 G_s 中 n 个点 $P_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$，皆存在函数 $f(\mathbf{x})$，它在 G_s 上处处有连续 q 阶偏微商，且其 q 阶偏微商适合(5)，并使(9)，(10)成立.

定理 1 即表明用函数在点 $P_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 上的任何加权和

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f(P_n(k)),$$

此处 $\rho_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为任何一组实数，来近似逼近定积分

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

误差都不能比 $c(q, \lambda, s)n^{-\frac{q+\lambda}{s}}$ 更好.

特别当 $f(\mathbf{x})$ 适合条件 (1.8) 时，用给定 n 个点的函数值构成的任何加权和来近似计算函数在 G_s 上的积分，误差都不能希望比 $O(n^{-1})$ 更小.

§4. 数值积分公式

本节假定 $f \in B_s$，并记

$$I(f) = \int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

则由第四章所讲的诸一致分布点集贯与定理 2.1 得如下的数值积分公式，供作查考.

$$\left|I(f) - \frac{1}{n}\sum_{l_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)2^s n^{-\frac{1}{s}}, \quad n = m^s, \text{（见 § 4.1）} \quad (1)$$

$$\left|I(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k))\right|$$

$$\leqslant V(f)\left(\prod_{i=1}^{s} \frac{p_i \log p_i n}{\log p_i}\right) n^{-1}, \quad \text{(见 § 4.2)} \tag{2}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}, \varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_{s-1}}(k_1)\right) \right|$$

$$\leqslant V(f)\left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{p_i \log p_i n}{\log p_i}\right) n^{-1}, \quad \text{(见 § 4.2)} \tag{3}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{ak}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a^{s-1}k}{p}\right\}\right) \right|$$

$$\leqslant V(f) \frac{(s+1)2^{2s}}{\pi^s} n^{-\frac{1}{2}} (\log 8p)^s, \quad n = p^2, \ p > e^s$$

$$\text{(见 § 4.3)} \tag{4}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}, \left\{\frac{k^2}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{n}\right\}\right) \right|$$

$$\leqslant V(f) \frac{(s+1)2^{2s}}{\pi^s} n^{-\frac{1}{2}} (\log 8p)^s, \quad n = p^2, \ p > e^s$$

$$\text{(见 § 4.3)} \tag{5}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{k^2}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right) \right|$$

$$\leqslant V(f) \frac{s2^s}{\pi^s} p^{-\frac{1}{2}} (\log 64p)^s, \quad p > e^{2s}, \quad \text{(见 § 4.3)}$$

$$\tag{6}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{\alpha_1 k\}, \cdots, \{\alpha_s k\}) \right|$$

$$\leqslant V(f) c(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}, \quad \text{(见 § 4.5)} \tag{7}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{\beta_1 k\}, \cdots, \{\beta_s k\}) \right|$$

$$\leqslant V(f) c(\boldsymbol{\beta}, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}, \quad \text{(见 § 4.5)} \tag{8}$$

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left\{\frac{c_1 k}{n}\right\}, \left\{\frac{c_2 k}{n}\right\}, \cdots, \left\{\frac{c_s k}{n}\right\}\right) \right|$$

$$\leqslant V(f)c(\mathscr{R}_s,\ \varepsilon)n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(s-1)}+\varepsilon}, \quad s=\frac{p-1}{2},$$

$$n=n_l, \quad c_i=c_i^{(l)}, \quad l=1,2,\cdots; \quad i=1,\cdots,s,$$

（见 § 4.6）　(9)

$$\left|I(f)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{q} f\left(\left\{\frac{c_1 k}{n}\right\},\ \cdots,\ \left\{\frac{c_{s+1} k}{n}\right\}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)c(\mathscr{R}_{s+1},\ \varepsilon)q^{-1+\varepsilon}, \quad s=\frac{p-3}{2},$$

$$1\leqslant q\leqslant n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}},$$ （见 § 4.6）　(10)

$$\left|I(f)-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n} f\left(\left\{\frac{k}{F_n}\right\},\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\cdots,\left\{\frac{F_n(s)}{F_n}k\right\}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)c(\eta)F_n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{s+1}\log 2}-\frac{1}{2^{2s+3}}}, F_n=F_n^{(s)},$$

（见 § 4.7）　(11)

$$\left|I(f)-\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{F_n} f\left(\left\{\frac{F_n(2)}{F_n}k\right\},\ \cdots,\ \left\{\frac{F_n(s+1)}{F_n}k\right\}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)c(\eta,\ \varepsilon)q^{-1+\varepsilon}, \quad F_n=F_n^{(s+1)},$$

$$1\leqslant q\leqslant (F_n)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s+2}\log 2}+\frac{1}{2^{2s+4}}},$$ （见 § 4.7）　(12)

$$\left|I(f)-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\},\ \left\{\frac{a_2 k}{p}\right\},\ \cdots,\ \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)\frac{(s+1)2^{2s}}{\pi^s}p^{-1}(\log 8p)^s, \quad p>e^s,$$

（见 § 4.9）　(13)

$$\left|I(f)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{n}\right\},\ \left\{\frac{a_2 k}{n}\right\},\ \cdots,\ \left\{\frac{a_s k}{n}\right\}\right)\right|$$

$$\leqslant V(f)\frac{(s+2)2^{2(s+1)}}{\pi^{s+1}}n^{-1}(\log 8p)^{s+1},$$

$p>e^s$, $1\leqslant n\leqslant p$,

$(1,\ a_1,\ \cdots,\ a_s)$ 为 mod$p$ 的极值系数

（见 § 4.9）　(14)

附记

1. 当 $f \in L_s$ 时，(2)与(3)之右端还可以分别改善一个因子 2^{-s} 与 2^{-s+1}（见 § 4.2）.

2. 当 $s=2$ 时，(11)之右端可以改进为 $c(\eta)F_n^{-1}(\log F_n)^2$. 当 $s=3$ 时，(11)之右端可以改进为 $c(\eta,\varepsilon)(F_n)^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$，(12)中之 q 的范围可以改进为 $q \leqslant F_n^{\frac{3}{4}}$（见 § 4.7）.

3. 当 f 在 G_s 上适合更强的条件，即有更高阶的连续偏微商时，求积公式(1)，(9)，(11)，(13)的误差主阶还可以改进. 改换公式(7)，(8)中之加权 $\frac{1}{n}$，则(7)，(8)的误差主阶亦可以改进（见第七章）.

注　　释

§ 1. 多维囿变函数的定义，最早见于 Krause, M. [1] 与 Hardy, G. H. [1]. 其一般性质请参看 Adams, C. R. 与 Clarkson, J. A. [1,2]. 这一函数类的推广，见 Zaremba, S. K. [2].

§ 2. 关于定理 1，当 $s=1$ 时，见 Koksma, J. F. [1]，当 $f \in L_s$ 时，见 Соболь, И. М. [1]，定理 1 见 Hlawka, E. [1]，（华罗庚也独立证明过）.

§ 3. 定理 1 见 Бахвалов, Н. С. [1].

第六章　周期函数与函数的周期化

§1. 周期函数

将 s 维单位立方体 G_s 看成环面更合适，一维环面就是把 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ 的两端连结在一起，即成一圈．二维环面 G_2 就是把正方形$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$，$0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ 的对边看成为合一而成的图形，具体地说，把一对对边粘上，成一管状面，而另两边各成一管口，再将两个管口粘上，成一环形．G_s 也就是把 s 维单位立方体的 $2s$ 个边界面成对地粘在一起，即将

$$(x_1, \cdots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \cdots, x_s)$$

与

$$(x_1, \cdots, x_{\nu-1}, 1, x_{\nu+1}, \cdots, x_s)$$

看成为同一点，此处$1 \leqslant \nu \leqslant s$.

以下如无声明，则均将 G_s 看成 s 维环面.

如果单值函数 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 的变数 $x_1, \cdots, x_s$ 都以 1 为周期，即

$$f(x_1, \cdots, x_\nu + 1, \cdots, x_s) = f(x_1, \cdots, x_\nu, \cdots, x_s),$$
$$1 \leqslant \nu \leqslant s,$$

这样的函数可以看成为 s 维环面 G_s 上定义的一个单值函数，最简单的例子是

$$e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)},$$

其中 $m_1, \cdots, m_s$ 都是整数.

命 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_s)$ 为 G_s 上对每一变数都有周期 1 的函数．命 $\alpha > 0$，置 $\alpha = \rho + \beta$，此处 ρ 为非负整数，$0 < \beta \leqslant 1$．定义

$$\delta_h^k f = (2i)^{-1}(f(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_s)$$

$$-f(x_1, \cdots, x_k - h, \cdots, x_s)), \tag{1}$$

假定导数

$$\frac{\partial^{\tau_1+\cdots+\tau_s} f}{\partial x_1^{\tau_1}\cdots\partial x_s^{\tau_s}} = f^{(\tau_1,\cdots,\tau_s)}, \quad 0 \leqslant \tau_1, \cdots, \tau_s \leqslant \rho \tag{2}$$

存在，且对每一变数 $x_v(1 \leqslant v \leqslant s)$ 都有周期 1，命

$$\|f^\alpha\| = \sup_{\substack{0<h_k\leqslant 1\\ \mathbf{x}\in G_s}} \left| \left(\left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{-\beta} \delta_{h_k}^k \right) f \right)^{(\rho,\cdots,\rho)} \right|, \tag{3}$$

命 $H_s^\alpha(C)$ 表示 G_s 上满足

$$\|f^\alpha\| \leqslant C \tag{4}$$

的函数 $f(\mathbf{x})$ 构成的函数类，此处 C 为一绝对正常数(以下常假定 f 的各低阶导数亦皆囿于 C)。

命

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\log_2|x|\right)\right)^2, & \text{当} \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他情形}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mu_t(x) = \mu(2^{1-t}x), \tag{6}$$

此处 t 为整数 $\geqslant 1$ 及

$$\mu_0(x) = 1 - \sum_{t=1}^{\infty} \mu_t(x), \tag{7}$$

则当 $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ 时有

$$\mu(x) + \mu\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\log_2|x|\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\log_2|x|\right)\right)^2$$
$$= 1, \tag{8}$$

因此当 $|x| \geqslant 1$ 时有

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mu_t(x) = 1 \tag{9}$$

或

$$\mu_0(\mathbf{x}) = 0. \tag{10}$$

若 $f(\mathbf{x})$ 有次之 Fourier 展开式

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{11}$$

此处求和号表示过所有整矢量 $\mathbf{m}$ 求和. 如果级数

$$\sum C(\mathbf{m})\lambda(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \tag{12}$$

几乎处处收敛,则将其和记为 $f(\mathbf{x})\odot\lambda(\mathbf{m})$.

对于非负整矢量 $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_s)$, 命

$$t_0=t_1+\cdots+t_s \tag{13}$$

及

$$\varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\odot\prod_{k=1}^{s}\mu_{t_k}(m_k)=\sum C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{14}$$

此处

$$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})=C(\mathbf{m})\mu_{t_1}(m_1)\cdots\mu_{t_s}(m_s). \tag{15}$$

命 $Q_s^{\alpha}(C)$ 表示 G_s 上适合

$$\|\varphi_{\mathbf{t}}\|=\sup_{x\in G_s}|\varphi_{\mathbf{t}}|\leqslant C2^{-\alpha t_0} \tag{16}$$

的连续函数 $f(\mathbf{x})$ 所成的函数类,此处 $\alpha>0$ 与 $C>0$ 都是绝对常数.

命 $E_s^{\alpha}(C)$ 表示 G_s 上适合下面条件的全体函数

$$f(\mathbf{x})\sim\sum C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{17}$$

此处

$$|C(\mathbf{m})|\leqslant\frac{C}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}}, \tag{18}$$

其中 $\alpha>0$ 与 $C>0$ 都是绝对常数.

§2. 若干引理

引理 1. 命

$$\Delta_2\lambda(n)=\lambda(n+1)-2\lambda(n)+\lambda(n-1) \tag{1}$$

及

$$K_\lambda(x)=\sum\lambda(n)e^{2\pi inx}, \tag{2}$$

若当 $|n|\geqslant M$ 时有 $\lambda(n)=0$, 此处 M 为一正整数,则

$$\sum\Delta_2\lambda(n)=0 \tag{3}$$

$$\sum n\Delta_2\lambda(n)=0 \tag{4}$$

及

$$K_\lambda(x) = -\sum \Delta_2 \lambda(n) \frac{e^{2\pi i n x}}{4(\sin \pi x)^2}. \tag{5}$$

证．(3),(4)易从(1)立刻推出，今往证明(5).

$$-\sum \Delta_2 \lambda(n) \frac{e^{2\pi i n x}}{4(\sin \pi x)^2} = -\sum \lambda(n) e^{2\pi i n x} \frac{(e^{2\pi i x} - 2 + e^{-2\pi i x})}{4(\sin \pi x)^2}$$

$$= -\sum \lambda(n) e^{2\pi i n x} \frac{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2}{4(\sin \pi x)^2} = K_\lambda(x).$$

引理证完.

记

$$\|f(\mathbf{x})\|_{L_1} = \int_{G_S} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \tag{6}$$

引理 2. 在引理 1 的假定下有

$$\|K_\lambda(x)\|_{L_1} \leqslant \frac{\pi M}{2} \sum |\Delta_2 \lambda(n)|. \tag{7}$$

证．记

$$\|K_\lambda(x)\|_{L_1} = I_1 + I_2, \tag{8}$$

此处

$$I_1 = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |K_\lambda(x)| dx, \quad I_2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |K_\lambda(x)| dx, \tag{9}$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{2\pi M}$.

由于当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sin \pi x \geqslant 2x$，所以

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left| \frac{e^{2\pi i n x}}{4(\sin \pi x)^2} \right| dx \leqslant 2 \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4(\sin \pi x)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{8} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{8\varepsilon} = \frac{\pi M}{4},$$

从而由(5)可知

$$I_1 \leqslant \frac{\pi M}{4} \sum |\Delta_2 \lambda(n)|. \tag{10}$$

又由引理 1 可知

$$K_\lambda(x) = -\sum \Delta_2 \lambda(n) \frac{(e^{2\pi i n x} - 1 - 2\pi i n x)}{4(\sin \pi x)^2}, \tag{11}$$

由于当 $-1\leqslant \alpha \leqslant 1$ 时

$$|e^{i\alpha}-1-i\alpha|\leqslant \alpha^2,$$

所以当 $|n|\leqslant M$ 时有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|\frac{e^{2\pi inx}-1-2\pi inx}{4(\sin \pi x)^2}\right|dx\leqslant \pi^2n^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{x}{\sin \pi x}\right)^2dx$$

$$\leqslant \frac{\pi^2n^2\varepsilon}{2}\leqslant \frac{\pi M}{4},$$

故由(11)得

$$I_2\leqslant \frac{\pi M}{4}\sum|\Delta_2\lambda(n)|, \tag{12}$$

由(8),(10)及(12)即得引理.

引理 3. 若 $f(\mathbf{x})$ 有下列 Fourier 展开式

$$f(\mathbf{x})\sim \sum C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{13}$$

则

$$\|f(\mathbf{x})\odot\lambda(\mathbf{m})\|\leqslant \|f(\mathbf{x})\|\prod_{k=1}^{s}\|K_{\lambda_k}(x)\|_{L_1}, \tag{14}$$

此处

$$\lambda(\mathbf{m})=\lambda_1(m_1)\cdots\lambda_s(m_s). \tag{15}$$

证. 由于当 n 为整数时有

$$\int_0^1 e^{2\pi inx}dx=\begin{cases}1, & 当\ n=0,\\ 0, & 当\ n\neq 0,\end{cases} \tag{16}$$

所以

$$f(\mathbf{x})\odot\lambda(\mathbf{m})=\sum C(\mathbf{m})\lambda(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}$$

$$=\int_{G_s}\prod_{\nu=1}^{s}K_{\lambda_\nu}(x_\nu-z_\nu)f(\mathbf{z})d\mathbf{z}$$

$$=(-1)^s\int_{G_s}\prod_{\nu=1}^{s}K_{\lambda_\nu}(y_\nu)f(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

从而

$$\|f(\mathbf{x})\odot\lambda(\mathbf{m})\|\leqslant \|f(\mathbf{x})\|\prod_{k=1}^{s}\|K_{\lambda_k}(x)\|_{L_1}.$$

引理证完.

引理 4. 假定 $\mu(x)$ 如 (1.5) 所定义，则

$$d(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}(|\mu|+2|\mu'|)dx+V(\mu')<c, \tag{17}$$

此处 $c>0$ 为绝对常数，而 $V(f)$ 表示函数 $f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$中的全变差.

证. 由 $\mu(x)$ 的定义可知

$$\mu'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{|x|\log 2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\log_2|x|\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\log_2|x|\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2, \\ 0, \quad \text{其他情形,}\end{cases} \tag{18}$$

即 $\mu'(x)$ 为囿变函数之积，故仍为囿变函数，引理证完.

引理 5. 命

$$g(\phi)=\max_{\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2}(|\phi|,|\phi'|,|\phi''|), \tag{19}$$

则

$$\|K_{\phi(n2^{1-t})\mu(n2^{1-t})}(x)\|_L\leqslant 2\pi d(\mu)g(\phi). \tag{20}$$

证. 由于

$$\begin{aligned}&|\Delta_2(\phi(n2^{1-t})\mu(n2^{1-t}))|\\&=\left|\int_0^{2^{1-t}}((\phi\mu)'(n2^{1-t}+z)-(\phi\mu)'((n-1)2^{1-t}+z))dz\right|\\&\leqslant 2^{1-t}\max_{0\leqslant z\leqslant 2^{1-t}}|(\phi\mu)'(n2^{1-t}+z)-(\phi\mu)'((n-1)2^{1-t}+z)|\end{aligned} \tag{21}$$

及当 $|n|\geqslant 2^t$ 时，$\mu(n2^{1-t})=0$，所以由引理 2 得

$$\begin{aligned}\|K_{\phi(n2^{1-t})\mu(n2^{1-t})}(x)\|_{L_1}&\leqslant\pi 2^{t-1}\sum|\Delta_2(\phi(n2^{1-t})\mu(n2^{1-t}))|\\&\leqslant\pi\sum\max_{0\leqslant z\leqslant 2^{1-t}}|(\phi\mu)'(n2^{1-t}+z)-(\phi\mu)'((n-1)2^{1-t}+z)|\\&\leqslant 2\pi V((\phi\mu)').\end{aligned} \tag{22}$$

由于

$$\begin{aligned}(\phi\mu)'(y)-(\phi\mu)'(x)&=\int_x^y(\phi\mu)''dz\\&=\int_x^y(\phi\mu''+2\phi'\mu'+\phi''\mu)dz,\end{aligned}$$

所以由引理 4 得

$$V((\phi\mu)') \leqslant g(\phi)d(\mu). \tag{23}$$

将(23)代入(22)即得引理.

§ 3. $H_s^\alpha(C)$, $Q_s^\alpha(C)$ 与 $E_s^\alpha(C)$ 的关系

定理 1. $H_s^\alpha(C) \subset Q_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$.

证. 记

$$h_k = \frac{1}{5} 2^{-t_k}, \quad \mu_{l,t_k}(n) = \mu_{t_k}(n)((2\pi i n)^l \sin 2\pi n h_k)^{-1} \tag{1}$$

及

$$K_{l,t_k}(x) = \sum \mu_{l,t_k}(n) e^{2\pi i n x}. \tag{2}$$

命 $f \in H_s^\alpha(C)$ 及

$$\varphi_{\mathbf{t}} = f \odot \prod_{k=1}^{s} \mu_{t_k}(m_k). \tag{3}$$

由于

$$\left(\prod_{k=1}^{s} \delta_{h_k}^k\right) f = \sum C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \prod_{k=1}^{s} (2i)^{-1}(e^{2\pi i m_k h_k} - e^{-2\pi i m_k h_k})$$

$$= f \odot \prod_{k=1}^{s} \sin 2\pi m_k h_k, \tag{4}$$

所以由(2.16)得

$$\varphi_{\mathbf{t}} = \left(\prod_{k=1}^{s} \delta_{h_k}^k\right) f \odot \prod_{k=1}^{s} \mu_{0,t_k}(m_k)$$

$$= \int_{G_s} \prod_{k=1}^{s} K_{0,t_k}(x_k - z_k) \left(\left(\prod_{j=1}^{s} \delta_{h_j}^j\right) f(\mathbf{z})\right) d\mathbf{z}. \tag{5}$$

由于

$$K_{l,t_k}^{(l)}(x) = K_{0,t_k}(x), \tag{6}$$

所以由(5)式关于每一变数 z_k 分部积分 ρ 次得

$$\varphi_{\mathbf{t}} = \int_{G_s} \left(\prod_{k=1}^{s} K_{\rho,t_k}(x_k - z_k)\right) \left(\left(\prod_{j=1}^{s} \delta_{h_j}^j\right) f(\mathbf{z})\right)^{(\rho,\cdots,\rho)} d\mathbf{z}$$

$$= \left(\left(\prod_{k=1}^{s} \delta_{h_k}^k\right) f\right)^{(\rho,\cdots,\rho)} \odot \prod_{j=1}^{s} \mu_{\rho, t_j(m_j)}. \tag{7}$$

由于 $f \in H_s^\alpha(C)$，所以

$$\left\| \left(\left(\prod_{k=1}^{s} \delta_{h_k}^k\right) f\right)^{(\rho,\cdots,\rho)} \right\| \leqslant C \prod_{k=1}^{s} h_k^\beta \leqslant C 5^{-\beta s} 2^{-\beta t_0}, \tag{8}$$

此处 t_0 由(1.13)定义．置

$$\psi(x) = ((2\pi i x 2^{t_k - 1})^\rho \sin(2\pi x 2^{t_k-1} h_k))^{-1}, \tag{9}$$

由于当 $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$ 时有

$$|\sin(2\pi x 2^{t_k-1} h_k)| \geqslant \sin \frac{\pi}{10},$$

所以

$$g(\psi) = \max_{\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2} (|\psi|, |\psi'|, |\psi''|) \leqslant c(\alpha) 2^{-\rho t_k}, \tag{10}$$

从而由引理 2.5 得

$$\|K_{\rho, t_k}(x)\|_L \leqslant c(\alpha) 2^{-\rho t_k}, \tag{11}$$

故由(7),(8),(11)及引理 3 得

$$\|\varphi_{\mathbf{t}}\| \leqslant \left\| \left(\left(\prod_{k=1}^{s} \delta_{h_k}^k\right) f\right)^{(\rho,\cdots,\rho)} \right\| \prod_{j=1}^{s} \|K_{\rho, t_j}(x)\|_{L_1}$$

$$\leqslant C \cdot c(\alpha)^s 2^{-\beta t_0 - \rho t_0} = C \cdot c(\alpha)^s 2^{-\alpha t_0}, \tag{12}$$

即 $f \in Q_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$．定理证完．

定理 2. $Q_s^\alpha(C) \subset E_s^\alpha(C \cdot 2^s)$．

证．假定 $f \in Q_s^\alpha(C)$ 及

$$\varphi_{\mathbf{t}} = f \odot \prod_{k=1}^{s} \mu_{t_k}(m_k) = \sum C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) e^{2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})}. \tag{13}$$

由于

$$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) = \int_{G_S} \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{m}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}, \tag{14}$$

所以

$$|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| \leqslant \int_{G_s} |\varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant \|\varphi_{\mathbf{t}}\| \leqslant C \cdot 2^{-\alpha t_0}. \tag{15}$$

由于当$|m_k| \geqslant 2^{t_k}$时，$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) = 0$，所以

$$|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| \leqslant C\|\mathbf{m}\|^{-\alpha}. \tag{16}$$

由(1.7)可知

$$C(\mathbf{m}) = C(\mathbf{m}) \sum_{t_1=0}^{\infty} \mu_{t_1}(m_1) \cdots \sum_{t_s=0}^{\infty} \mu_{t_s}(m_s) = \sum{}'' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}), \tag{17}$$

此处Σ''表示过所有非负整矢量 $\mathbf{t}$ 求和.

固定$\mathbf{m}$,共有不超过 2^s 个非负整矢量 $\mathbf{t}$ 适合于

$$2^{-1} < |2^{1-t_k} m_k| < 2, \quad k = 1, \cdots, s, \tag{18}$$

换言之，最多有 2^s 个非负整矢量 $\mathbf{t}$ 使 $C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) \neq 0$，因而由(16)，(17)可得

$$|C(\mathbf{m})| \leqslant C \cdot 2^s \|\mathbf{m}\|^{-\alpha}, \tag{19}$$

即 $f \in E_s^\alpha(C \cdot 2^s)$. 定理证完.

定理 3. 若 $f \in Q_s^\alpha(C)$，则

$$f(\mathbf{x}) = \sum{}'' \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}). \tag{20}$$

证. 由于 $f \in Q_s^\alpha(C)$，所以由定义可知

$$\|\varphi_{\mathbf{t}}\| = \sup_{\mathbf{x} \in G_s} |\varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})| \leqslant C \cdot 2^{-\alpha t_0}, \tag{21}$$

因而

$$\sum{}'' \|\varphi_{\mathbf{t}}\| \leqslant C \sum{}'' 2^{-\alpha t_0} = C \left(\sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\alpha} \right)^s = C \cdot c(\alpha)^s, \tag{22}$$

故级数

$$\sum{}'' \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \tag{23}$$

在 G_s 上一致收敛，记其和为 $f_0(\mathbf{x})$. 因 $f_0(x)$ 为一般项为连续函数的一致收敛级数之和,所以 $f_0(\mathbf{x})$ 仍为 G_s 上的连续函数.

由(1.7)可知对于任何整矢量 $\mathbf{n}$ 皆有

$$\begin{aligned} &\int_{G_s} (f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})) e^{-2\pi i (\mathbf{n}, \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \sum \int_{G_s} (C(\mathbf{m}) - \sum{}'' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})) e^{2\pi i (\mathbf{m}-\mathbf{n}, \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= C(\mathbf{n}) - \sum{}'' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{n}) \\ &= C(\mathbf{n})(1 - \sum{}'' \mu_{t_1}(n_1) \cdots \mu_{t_s}(n_s)) = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

所以 $f(\mathbf{x})$ 与 $f_0(\mathbf{x})$ 在 G_s 上几乎处处相等. 因为 $f(\mathbf{x})$ 与 $f_0(\mathbf{x})$ 都是 G_s 上的连续函数,所以

$$f(\mathbf{x}) \equiv f_0(\mathbf{x}). \tag{25}$$

定理证完.

§4. 简单周期化方法

我们将在本节与下节来介绍将非周期函数的数值积分化为周期函数的数值积分的方法.

首先引入记号

$$\mathbf{x}_\nu(x) = (x_1, \cdots, x_{\nu-1}, x, x_{\nu+1}, \cdots, x_s). \tag{1}$$

命 $f(\mathbf{x})$ 为 s 维单位立方体 G_s 上定义的函数,命 $\alpha > 0$,置 $\alpha = \rho + \beta$, 此处 ρ 为非负整数及 $0 < \beta \leqslant 1$. 当 $\mathbf{x} \in G_s$ 及 $\mathbf{x}_k(x_k + h) \in G_s$ 时, 定义

$$\sigma_h^k f = f(\mathbf{x}_k(x_k + h)) - f(\mathbf{x}). \tag{2}$$

假定导数

$$\frac{\partial^{\tau_1+\cdots+\tau_s} f}{\partial x_1^{\tau_1} \cdots \partial x_s^{\tau_s}} = f^{(\tau_1, \cdots, \tau_s)}, \quad 0 \leqslant \tau_1, \cdots, \tau_s \leqslant \rho \tag{3}$$

存在,命

$$\|f^\alpha\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in G_s \\ \mathbf{x}+\mathbf{h} \in G_s}} \left| \left(\left(\prod_{k=1}^{s} |h_k|^{-\beta} \sigma_{h_k}^k \right) f \right)^{(\rho, \cdots, \rho)} \right|. \tag{4}$$

命 $D_s^\alpha(C)$ 表示 s 维单位立方体 G_s 上满足

$$\|f^\alpha\| \leqslant C \tag{5}$$

的函数构成的函数类,此处 $C > 0$ 为一绝对常数.

对于 $f \in D_s^\alpha(C)$, 凡满足

$$\varphi(\mathbf{x}_\nu(1)) = \varphi(\mathbf{x}_\nu(0)), \quad \nu = 1, \cdots, s \tag{6}$$

与

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{G_s} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{7}$$

且属于 $D_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$ 之函数 $\varphi(\mathbf{x})$,皆称为 $f(\mathbf{x})$ 之简单周期化函数.

因此由函数类 $H_s^\alpha(C)$ 的定义立刻推出

定理 1. 假定 $\alpha \leqslant 1$，若 $\varphi \in D_s^\alpha(C)$ 为 f 之简单周期化函数，则 $\varphi(\{x_1\}, \cdots, \{x_s\}) \in H_s^\alpha(C)$.

由定理 1 可见，当 $\alpha \leqslant 1$ 时，属于 $D_s^\alpha(C)$ 的函数 f 在 s 维单位立方体 G_s 上的积分，等于 f 的属于 $H_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$ 的简单周期化函数 φ 在 s 维环面 G_s 上的积分．因此由函数类 $H_s^\alpha(C)$ 的数值积分方法即能诱导出函数类 $D_s^\alpha(C)$ 的数值积分方法.

以下将引入几种简单周期化方法.

1）对称化方法．命

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}_1(1 - x_1))),$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x}_2(1 - x_2))),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\varphi_{s-1}(\mathbf{x}) + \varphi_{s-1}(\mathbf{x}_s(1 - x_s))), \tag{8}$$

定义

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_s(\mathbf{x}), \tag{9}$$

则由 $f \in D_s^\alpha(C)$，显然得出 $\varphi \in D_s^\alpha(C)$，由(8)立即得

$$\varphi_1(\mathbf{x}_1(1)) = \varphi_1(\mathbf{x}_1(0)) = \frac{f(\mathbf{x}_1(1)) + f(\mathbf{x}_1(0))}{2}, \tag{10}$$

又作代换 $1 - x_1 = y_1$，则得

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{G_s} \varphi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{11}$$

不难用数学归纳法验证 φ 适合条件(6)与(7)，所以 φ 为 f 的简单周期化函数.

2）代换法．命

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)(f(\mathbf{x}_1(0)) - f(\mathbf{x}_1(1))),$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)(\varphi_1(\mathbf{x}_2(0)) - \varphi_1(\mathbf{x}_2(1))),$$

$$\cdots\cdots\ \cdots\cdots$$

$$\varphi_s(\mathbf{x}) = \varphi_{s-1}(\mathbf{x}) + \left(x_s - \frac{1}{2}\right)(\varphi_{s-1}(\mathbf{x}_s(0)) - \varphi_{s-1}(\mathbf{x}_s(1))), \tag{12}$$

定义

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_s(\mathbf{x}), \tag{13}$$

则由 $f \in D_s^\alpha(C)$，显然得出 $\varphi \in D_s^\alpha(C \cdot 3^s)$，由(12)得

$$\varphi_1(\mathbf{x}_1(1)) = \varphi_1(\mathbf{x}_1(0)) = \frac{f(\mathbf{x}_1(1)) + f(\mathbf{x}_1(0))}{2} \tag{14}$$

与

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{G_s} \varphi_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{15}$$

不难用数学归纳法验证 φ 满足条件(6)与(7)，所以 φ 为 f 的简单周期化函数.

3）换变数法. 命 $\psi(x) \in D_1^{\alpha+1}(c(\alpha))$ 为 $[0, 1]$ 中的递增函数,且满足

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1, \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0, \tag{16}$$

由(16)立即推知如 $f \in D_s^\alpha(C)$，则

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\psi(x_1), \cdots, \psi(x_s))\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_s) \tag{17}$$

适合于条件(6)与(7)，且 $\varphi \in D_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$，所以 φ 为 f 的简单周期化函数.

例如取 $\psi(x) = \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$，则 $\psi'(x) = \frac{\pi}{2}\sin \pi x$. 易知 $\psi(x)$ 满足条件(16)，从而函数

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \sin \pi x_1 \cdots \sin \pi x_s f\left(\left(\sin\frac{\pi x_1}{2}\right)^2, \cdots, \left(\sin\frac{\pi x_s}{2}\right)^2\right) \tag{18}$$

为 f 的简单周期化函数. 易知 $\psi(x) \in D_1^\alpha(\pi^\alpha)(\alpha = 1, 2, \cdots)$ 及 $\varphi \in D_s^\alpha(C \cdot (2\pi)^{(\alpha+1)s})$.

§5. 完全周期化方法

首先引入记号

$$\frac{\partial^l \varphi(\mathbf{x}_\nu(x))}{\partial x_\nu^l} = \frac{\partial^l \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_\nu^l}\Big|_{x_\nu = x}, \tag{1}$$

假定 $f \in D_s^\alpha(C)$, 凡满足

$$\frac{\partial^l \varphi(\mathbf{x}_\nu(1))}{\partial x_\nu^l} = \frac{\partial^l \varphi(\mathbf{x}_\nu(0))}{\partial x_\nu^l},$$

$$l = 0, 1, \cdots, \rho; \quad \nu = 1, 2, \cdots, s \tag{2}$$

与

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{G_s} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{3}$$

且属于 $D_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$ 之函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 皆称为 $f(\mathbf{x})$ 之完全周期化函数.

由(2)可得

$$\varphi(\mathbf{x}_\nu(1))^{(l_1, \cdots, l_s)} = \varphi(\mathbf{x}_\nu(0))^{(l_1, \cdots, l_s)}, \quad 0 \leqslant l_1, \cdots, l_s \leqslant \rho. \tag{4}$$

由函数类 $H_s^\alpha(C)$ 与 $D_s^\alpha(C)$ 的定义立刻推出

定理 1. 若 $\varphi \in D_s^\alpha(C)$ 为 f 之完全周期化函数, 则 $\varphi(\{x_1\}, \cdots, \{x_s\}) \in H_s^\alpha(C)$.

因此由函数类 $H_s^\alpha(C)$ 的数值积分方法即能诱导出函数类 $D_s^\alpha(C)$ 的数值积分方法.

以下将引入两种完全周期化方法.

1) 换变数法. 命 $\psi(x) \in D_1^{\alpha+1}(c(\alpha))$ 为$[0,1]$中的递增函数, 且满足

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 1, \quad \psi^{(l)}(0) = \psi^{(l)}(1) = 0,$$

$$l = 1, \cdots, \rho + 1, \tag{5}$$

若 $f \in D_s^\alpha(C)$, 则函数

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\psi(x_1), \cdots, \psi(x_s))\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_s) \tag{6}$$

显然适合(2),(3),且 $\varphi \in D_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$,所以 φ 为 f 的完全周期化函数.

例如取 n 为整数 $\geqslant 2$及

$$\psi_n(x) = (2n-1)C_{n-1}^{2(n-1)}\int_0^x (t(1-t))^{n-1} dt, \tag{7}$$

则显然有

$$\psi_n(0)=0. \tag{8}$$

又由分部积分得

$$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}dt=\frac{n-1}{n}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-2}dt=\cdots$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n(n+1)\cdots(2n-2)}\int_0^1 t^{2n-2}dt$$
$$=\frac{1}{(2n-1)C_{n-1}^{2(n-1)}},$$

所以

$$\psi_n(1)=(2n-1)C_{n-1}^{2(n-1)}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}dt=1. \tag{9}$$

对(7)式两端求微商得

$$\psi_n'(x)=(2n-1)C_{n-1}^{2(n-1)}x^{n-1}(1-x)^{n-1}, \tag{10}$$

因此有

$$\psi_n^{(l)}(0)=\psi_n^{(l)}(1)=0,\quad l=1,2,\cdots,n-1. \tag{11}$$

所以由(8)，(9)，(11)可知 $\psi_{\rho+2}(x)$ 适合于条件(5)，因此若 $f\in D_s^\alpha(C)$，则函数

$$\varphi(\mathbf{x})=f(\psi_{\rho+2}(x_1),\cdots,\psi_{\rho+2}(x_s))\psi'_{\rho+2}(x_1)\cdots\psi'_{\rho+2}(x_s) \tag{12}$$

为 f 的完全周期化函数，且 $\varphi\in D_s^\alpha(C\cdot c(\alpha)^s)$.

特别当 $n=2,3,\cdots$ 时有

$$\psi_2(x)=6\int_0^x t(1-t)dt=3x^2-2x^3,$$

$$\psi_3(x)=30\int_0^x t^2(1-t)^2dt=10x^3-15x^4+6x^5,$$

等等.

2) Bernoulli 多项式法.

我们分别称由下面递推公式

$$B_0=1,\quad \sum_{k=0}^{n-1}C_k^nB_k=0,\quad n\geqslant 2 \tag{13}$$

与

$$B_0(x)=1,\quad B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k^nB_kx^{n-k},\quad n\geqslant 1 \tag{14}$$

定义的有理数 $B_n(n=0,1,\cdots)$ 与多项式 $B_n(x)(n=0,1,\cdots)$ 为 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式.

例如. $C_0^2B_0+C_1^2B_1=0, \qquad B_1=-\frac{1}{2},$

$$C_0^3B_0+C_1^3B_1+C_2^3B_2=0, \quad B_2=\frac{1}{6},$$

及

$$B_1(x)=C_0^1B_0x+C_1^1B_1=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=C_0^2B_0x+C_1^2B_1x+C_2^2B_2=x^2-x+\frac{1}{6},$$

等等.

引理 1. Bernoulli 多项式适合于

$$B_n(1)-B_n(0)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1,\\ 0, & \text{当 } n\neq 1,\end{cases} \tag{15}$$

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x), \quad n\geqslant 1, \tag{16}$$

与

$$\int_0^1 B_n(x)dx=0, \quad n\geqslant 1. \tag{17}$$

证. 因

$$B_0(x)=1, \quad B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

所以当 $n=0,1$ 时,(15)式成立. 当 $n\geqslant 2$ 时,由(13),(14)得

$$B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}C_k^nB_k=B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_k^nB_k=B_n=B_n(0),$$

故得(15)式. 关于(14)求微商得

$$B_n'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_k^nB_kx^{n-k-1}$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{n-1}B_kx^{n-1-k}=nB_{n-1}(x), \quad n\geqslant 1,$$

(16)得证. 又由(13),(14)得

$$\int_0^1 B_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} C_k^n B_k \frac{1}{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_k^{n+1} B_k = 0, \quad n \geqslant 1.$$

引理证完.

引理 2. 命

$$P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} B_{n+1}(x), \tag{18}$$

则当 $l \geqslant 0$ 时有

$$P_n^{(l)}(1) - P_n^{(l)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{当 } l = n, \\ 0, & \text{当 } l \neq n. \end{cases} \tag{19}$$

证. 由于 $B_n(x)$ 为 n 次多项式,所以当 $l > n+1$ 时,引理显然成立. 现在假定 $l \leqslant n+1$, 由引理 1 可得

$$P_n'(x) = \frac{B_{n+1}'(x)}{(n+1)!} = \frac{B_n(x)}{n!},$$

$$\cdots\cdots$$

$$P_n^{(l)}(x) = \frac{B_{n+1-l}(x)}{(n+1-l)!},$$

所以由引理 1 得

$$P_n^{(l)}(1) - P_n^{(l)}(0) = \frac{B_{n+1-l}(1) - B_{n+1-l}(0)}{(n+1-l)!} = \begin{cases} 1, & \text{当 } l = n, \\ 0, & \text{当 } l \neq n. \end{cases}$$

引理证完.

引理 3. 命 $F(x) \in D_1^\rho(C)$ 及函数 $\Phi(x)$ 为由下式定义的函数

$$\Phi(x) = F(x) + \sum_{n=0}^{\rho}\sum_{\eta=0}^{1} (-1)^\eta P_n(x) F^{(n)}(\eta), \tag{20}$$

则

$$\Phi^{(l)}(1) = \Phi^{(l)}(0), \quad l = 0, 1, \cdots, \rho. \tag{21}$$

证. 当 $0 \leqslant l \leqslant \rho$ 时,关于(20)式求微商得

$$\Phi^{(l)}(x) = F^{(l)}(x) + \sum_{n=0}^{\rho}\sum_{\eta=0}^{1} (-1)^\eta P_n^{(l)}(x) F^{(n)}(\eta),$$

所以由引理 2 可知

$$\Phi^{(l)}(1)-\Phi^{(l)}(0)=F^{(l)}(1)-F^{(l)}(0)$$

$$+\sum_{n=0}^{\rho}\sum_{\eta=0}^{1}(-1)^{\eta}(P_n^{(l)}(1)-P_n^{(l)}(0))F^{(n)}(\eta)$$

$$=F^{(l)}(1)-F^{(l)}(0)+\sum_{\eta=0}^{1}(-1)^{\eta}F^{(l)}(\eta)=0.$$

引理证完.

命

$$\varphi_\nu(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), \tag{22}$$

当 $\nu=1,\cdots,s$ 时,由下面的递推公式定义 $\varphi_\nu(\mathbf{x})$

$$\varphi_\nu(\mathbf{x})=\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x})+\sum_{n_\nu=0}^{\rho}\sum_{\eta_\nu=0}^{1}(-1)^{\eta_\nu}P_{n_\nu}(x_\nu)\frac{\partial^{n_\nu}\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x}_\nu(\eta_\nu))}{\partial x_\nu^{n_\nu}}. \tag{23}$$

定义

$$\varphi(\mathbf{x})=\varphi_s(\mathbf{x}). \tag{24}$$

今往证明当 $f\in D_s^\alpha(C)$ 时, φ 为 f 的完全周期化函数.

1) 由引理 1 可知

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 B_{n+1}(x)dx=0,\quad n\geqslant 0, \tag{25}$$

所以由(23)即得

$$\int_{G_s}\varphi_\nu(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{G_s}\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x})d\mathbf{x},\quad \nu=1,\cdots,s, \tag{26}$$

因此

$$\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{G_s}\varphi_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\cdots$$

$$=\int_{G_s}\varphi_{s-1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{G_s}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{27}$$

即(3)式成立.

2) 取

$$F(x_\nu)=\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x}), \tag{28}$$

则由(20),(23)得

$$\Phi(x_\nu) = \varphi_\nu(\mathbf{x}), \tag{29}$$

故由引理 3 可知

$$\frac{\partial^{l_\nu}\varphi_\nu(\mathbf{x}_\nu(1))}{\partial x_\nu^{l_\nu}} = \frac{\partial^{l_\nu}\varphi_\nu(\mathbf{x}_\nu(0))}{\partial x_\nu^{l_\nu}},$$

$$\nu = 1, \cdots, s; \quad l_\nu = 0, \cdots, \rho. \tag{30}$$

今往证明当 $1 \leqslant \nu \leqslant s$ 时有

$$\frac{\partial^{l_j}\varphi_\nu(\mathbf{x}_j(1))}{\partial x_j^{l_j}} = \frac{\partial^{l_j}\varphi_\nu(\mathbf{x}_j(0))}{\partial x_j^{l_j}},$$

$$j = 1, \cdots, \nu; \quad l_j = 0, \cdots, \rho. \tag{31}$$

当 $\nu = 1$ 时，(31) 式即 (30)式，故成立. 现在假定 $\nu > 1$ 及当 $\nu - 1$ 时，(31) 成立，即

$$\frac{\partial^{l_j}\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x}_j(1))}{\partial x_j^{l_j}} = \frac{\partial^{l_j}\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x}_j(0))}{\partial x_j^{l_j}},$$

$$j = 1, \cdots, \nu - 1; \quad l_j = 0, \cdots, \rho. \tag{32}$$

关于 x_ν 微商 $n_\nu(0 \leqslant n_\nu \leqslant \rho)$ 次得

$$\frac{\partial^{l_j+n_\nu}\varphi_{\nu-1}(\mathbf{x}_j(1))}{\partial x_j^{l_j}\partial x_\nu^{n_\nu}} = \frac{\partial^{l_j+n_\nu}\varphi(\mathbf{x}_j(0))}{\partial x_j^{l_j}\partial x_\nu^{n_\nu}},$$

$$j = 1, \cdots, \nu - 1; \quad l_j = 0, \cdots, \rho. \tag{33}$$

由(23)式，关于 x_j 求微商，则由(33)式得

$$\frac{\partial^{l_j}\varphi_\nu(\mathbf{x}_j(1))}{\partial x_j^{l_j}} = \frac{\partial^{l_j}\varphi_\nu(\mathbf{x}_j(0))}{\partial x_j^{l_j}},$$

$$j = 1, \cdots, \nu - 1; \quad l_j = 0, \cdots, \rho. \tag{34}$$

由(30)，(34)可知 (31) 关于 ν 亦成立，因此由归纳法可知当 $1 \leqslant \nu \leqslant s$ 时，(31)皆成立.

特别取 $\nu = s$，则由(31)即得

$$\frac{\partial^{l}\varphi(\mathbf{x}_j(1))}{\partial x_j^{l}} = \frac{\partial^{l}\varphi(\mathbf{x}_j(0))}{\partial x_j^{l}},$$

$$j = 1, \cdots, s; \quad l = 0, \cdots, \rho, \tag{35}$$

即(2)式成立.

3) 由于 $B_n(x) \in H_1^\alpha(c(n))(\alpha = 1, 2, \cdots)$，所以由 $f \in D_s^\alpha(C)$ 即得出 $\varphi \in D_s^\alpha(C \cdot c(\alpha)^s)$.

由1)，2)，3)即可知φ为f的完全周期化函数.

注　　释

§1. 函数类$E_s^\alpha(C)$是 Коробов, Н. М.[1,2,7] 首先引进的. 函数类$H_s^\alpha(C)$与$Q_s^\alpha(C)$则是 Бахвалов, Н. С.[3,4] 引进的，这里我们对他原来的定义作了适当的修改(参看华罗庚与王元[6,7]).

§§2—3. 参看 Бахвалов, Н. С. [3,4].

§§4—5. 参看 Коробов, Н. М. [7]，шарыгин, И. Ф. [1].

第七章　周期函数的数值积分

§1. 平均格网点集与数值积分

命 m 为正整数及 $n = m^s$.

定理 1. 假定 $\alpha > 1$, 则

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m}\right) \right|$$
$$\leqslant C \cdot (2\zeta(\alpha) + 1)^s n^{-\frac{\alpha}{s}}, \tag{1}$$

此处

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}. \tag{2}$$

证. 当 $\alpha > 1$ 时, $E_s^\alpha(C)$ 的函数 f 有绝对收敛的 Fourier 展开式(见 §6.1).

$$f(\mathbf{x}) = \sum C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})}, \quad |C(\mathbf{m})| \leqslant \frac{C}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}. \tag{3}$$

命 $\mathbf{l} = (l_1, \cdots, l_s)$, 由于

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i n k}{m}} = \begin{cases} m, & 当\ m \mid n, \\ 0, & 当\ m \nmid n, \end{cases} \tag{4}$$

(见引理 3.5.1) 及

$$C(\mathbf{0}) = \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{5}$$

所以

$$\frac{1}{n} \sum_{l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m}\right)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{m-1} \sum C(\mathbf{m}) e^{\frac{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{l})}{m}}$$

$$= \sum C(\mathbf{m}) \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{1}{m} \sum_{l_j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i l_j m_j}{m}} \right)$$

$$= \sum_{\substack{m|m_j \\ 1 \leqslant j \leqslant s}} C(\mathbf{m}) = C(\mathbf{0}) + \sum_{\substack{m|m_j \\ 1 \leqslant j \leqslant s}}{}' C(\mathbf{m}),$$

因此

$$\left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m} \right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{m|m_j \\ 1 \leqslant j \leqslant s}}{}' |C(\mathbf{m})| = \sum{}' |C(m\mathbf{m})|$$

$$\leqslant C \sum{}' \frac{1}{\|m\mathbf{m}\|^{\alpha}} \leqslant C \left(\sum \frac{1}{\bar{k}^{\alpha}} \right)^{s} m^{-\alpha}$$

$$= C(2\zeta(\alpha) + 1)^s n^{-\frac{\alpha}{s}}.$$

定理证完.

下面的例子说明定理 1 本质上是不能改进的,即 $n^{-\frac{\alpha}{s}}$ 不能再作进一步改进. 取

$$f(\mathbf{x}) = C \cdot \frac{e^{2\pi i m x} + e^{-2\pi i m x}}{m^{\alpha}}, \tag{6}$$

则 $f \in E_s^{\alpha}(C)$(当 α 为整数时, $f \in H_s^{\alpha}(C \cdot (2\pi)^{\alpha+1})$), 而且

$$\left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{l_s=0}^{m-1} f\left(\frac{l_1}{m}, \cdots, \frac{l_s}{m} \right) \right|$$

$$= \frac{2C}{m^s} = 2Cn^{-\frac{\alpha}{s}}. \tag{7}$$

所以用定理 1 的方法计算 $E_s^{\alpha}(C)(\alpha > 1)$ 的函数的数值积分, 确有 $E_s^{\alpha}(C)$ 中的函数使误差不小于 $2Cn^{-\frac{\alpha}{s}}$.

§ 2. 方幂点集与数值积分

以下命 p 表示奇素数.

定理 1. 假定 $\alpha > 1$ 及 $n = p^2$, 则

$$\sup_{f \in E_s^{\alpha}(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{a}{p}, \frac{ak}{p}, \cdots, \frac{ak^{s-1}}{p} \right) \right|$$

$$\leqslant C \cdot s(2\zeta(\alpha)+1)^s n^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

证. 命 $\mathbf{k}=(1, k, \cdots, k^{s-1})$, 则由(1.3),(1.4),(1.5)得

$$\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{a}{p}, \frac{ak}{p}, \cdots, \frac{ak^{s-1}}{p}\right)=\sum C(\mathbf{m})\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k}, \mathbf{m})a}{p}}$$

$$=p^2 C(\mathbf{0})+p \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ (\mathbf{k},\mathbf{m})\equiv 0 \pmod p}}^{p}{}' C(\mathbf{m}),$$

所以

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{a}{p}, \frac{ak}{p}, \cdots, \frac{ak^{s-1}}{p}\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{p}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ (\mathbf{k},\mathbf{m})\equiv 0 \pmod p}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}. \tag{2}$$

由于当 $m_1, \cdots, m_s$ 不同时为 p 之倍数时,同余式

$$(\mathbf{k}, \mathbf{m})\equiv 0 \pmod p \quad 1\leqslant k\leqslant p$$

之解数不超过 $s-1$, 否则解数为 p(见引理 4.3.1), 故

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ (\mathbf{k},\mathbf{m})\equiv 0 \pmod p}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}\leqslant (s-1)\sum{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}+p\sum{}' \frac{1}{\|p\mathbf{m}\|^\alpha}$$

$$\leqslant s\sum \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}=s\left(\sum \frac{1}{\bar{m}^\alpha}\right)^s=s(2\zeta(\alpha)+1)^s. \tag{3}$$

由(2),(3)即得定理.

引理 1. 将正整数 n 分为 s 个非负整数之和

$$n=r_1+\cdots+r_s \tag{4}$$

的方法为 C_{s-1}^{n+s-1}.

证. 当 $|x|<1$时有

$$\frac{1}{(1-x)^s}=\left(\sum_{r=0}^{\infty} x^r\right)^s=\sum_{\substack{r_1=0\\ n=r_1+\cdots+r_s}}^{\infty}\cdots\sum_{r_s=0}^{\infty} x^n, \tag{5}$$

另一方面

$$\frac{1}{(1-x)^s}=\sum_{n=0}^{\infty} C_{s-1}^{n+s-1} x^n, \tag{6}$$

比较(5),(6)中 x^n 之系数即得引理.

引理 2. 假定 s 为整数且 $\geqslant 0$，n 为整数且 $\geqslant 1$ 及 $\alpha > 0$，则

$$\sum_{t=n}^{\infty} t^s 2^{-\alpha t} \leqslant c(\alpha, s) n^s 2^{-\alpha n}. \tag{7}$$

证. 由于

$$t^s 2^{-\alpha t} \leqslant \int_t^{t+1} u^s 2^{-\alpha(u-1)} du, \quad t = n, n+1, \cdots,$$

所以由分部积分得

$$\begin{aligned}
\sum_{t=n}^{\infty} t^s 2^{-\alpha t} &\leqslant \int_n^{\infty} u^s 2^{-\alpha(u-1)} du \\
&= \frac{n^s 2^{-\alpha(n-1)}}{\alpha \log 2} + \frac{s}{\alpha \log 2} \int_n^{\infty} u^{s-1} 2^{-\alpha(u-1)} du \\
&= \cdots = \sum_{k=0}^{s} \frac{k!\, C_s^k n^{s-k} 2^{-\alpha(n-1)}}{(\alpha \log 2)^{k+1}} \leqslant c(\alpha, s) n^s 2^{-\alpha n}.
\end{aligned}$$

引理证完.

定理 2. 假定 $0 < \alpha \leqslant 1$，则

$$\sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \cdots, \frac{k^s}{p}\right) \right|$$

$$\leqslant \begin{cases} C \cdot c(\alpha, s) p^{-\frac{1}{2}}, & \text{当 } \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1, \\ C \cdot c(\alpha, s) p^{-\alpha} (\log p)^{s-1+\delta_{\frac{1}{2}, \alpha}}, & \text{当 } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

证. 假定 $f \in Q_s^\alpha(C)$，命

$$S(f) = \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \cdots, \frac{k^s}{p}\right), \tag{9}$$

则由定理 6.3.3 可知

$$S(f) = \sum{}'' S(\varphi_{\mathbf{t}}), \tag{10}$$

此处

$$S(\varphi_{\mathbf{t}}) = \int_{G_s} \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \cdots, \frac{k^s}{p}\right), \tag{11}$$

因而

$$\sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} |S(f)| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{12}$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0\geqslant\log_2 p}{}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})| \tag{13}$$

与

$$\sum\nolimits_2 = \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0<\log_2 p}{}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})|, \tag{14}$$

其中 $t_0 = t_1 + \cdots + t_s$（见(6.1.13)）. 由(6.1.16)可知

$$|S(\varphi_{\mathbf{t}})| \leqslant 2\|\varphi_{\mathbf{t}}\| \leqslant C\cdot 2^{1-\alpha t_0}, \tag{15}$$

又由于 $C_{s-1}^{t+s-1} \leqslant c(s)t^{s-1}$，所以由引理1，及引理2得

$$\sum\nolimits_1 \leqslant C\cdot c(s) \sum_{t_0\geqslant\log_2 p}{}'' 2^{-\alpha t_0} \leqslant C\cdot c(s) \sum_{t=[\log_2 p]}^{\infty} t^{s-1}2^{-\alpha t}$$

$$\leqslant C\cdot c(\alpha, s)p^{-\alpha}(\log p)^{s-1}. \tag{16}$$

记 $\mathbf{k} = (k, k^2, \cdots, k^s)$，由于

$$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) = \int_{G_s} \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{17}$$

所以由(6.1.14)得

$$\sum_{k=1}^{p} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k}{p}, \frac{k^2}{p}, \cdots, \frac{k^s}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p} \sum C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})}{p}}$$

$$= pC_{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) + \sum{}' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})}{p}},$$

$$|S(\varphi_{\mathbf{t}})| \leqslant p^{-1}\sum{}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| \left|\sum_{k=1}^{p} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{m})}{p}}\right|. \tag{18}$$

命 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$，若诸关系式 $|m_i| < 2^{t_i}(1\leqslant i\leqslant s)$ 中有一个不成立，则由(6.1.5),(6.1.6),(6.1.15)可知 $C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) = 0$. 而当 $|m_i| < 2^{t_i}$ $(1\leqslant i\leqslant s)$都成立及 $t_0 < \log_2 p$ 时，则 p 不能整除所有的 $m_i(1\leqslant i\leqslant s)$，故由引理 4.3.3 可知

$$\sum\nolimits_2 \leqslant (s-1)p^{-\frac{1}{2}} \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0<\log_2 p}{}'' \sum_{|m_i|<2^{t_i}}{}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|. \tag{19}$$

命

$$\|F\|_{L_2} = \left(\int_{G_s} |F(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

则

$$\sum |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2 = \|\varphi_{\mathbf{t}}\|_{L_2}^2 \leqslant \|\varphi_{\mathbf{t}}\|^2 \leqslant C^2 \cdot c(\alpha, s) 2^{-2\alpha t_0}, \tag{21}$$

所以由引理 1, 引理 2 及 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leqslant (s-1)p^{-\frac{1}{2}} \sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0 < \log_2 p}{}' \left(\sum_{|m_i| < 2^{t_i}}{}' 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m_i| < 2^{t_i}}{}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (s-1)p^{-\frac{1}{2}} \sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0 < \log_2 p}{}'' 2^{\frac{s+t_0}{2}} \|\varphi_{\mathbf{t}}\|_{L_2} \\
&\leqslant C \cdot c(\alpha, s) p^{-\frac{1}{2}} \sum_{t_0 < \log_2 p}{}'' 2^{-(\alpha - \frac{1}{2})t_0} \\
&\leqslant C \cdot c(\alpha, s) p^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{[\log_2 p]} (t+1)^{s-1} 2^{-(\alpha - \frac{1}{2})t} \\
&\leqslant \begin{cases} C \cdot c(\alpha, s) p^{-\frac{1}{2}}, & \text{当 } \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1, \\ C \cdot c(\alpha, s) p^{-\alpha} (\log p)^{s-1+\delta_{\frac{1}{2}, \alpha}}, & \text{当 } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{22}$$

由(9),(12),(16),(22)即得定理.

当 $\alpha > 1$ 时,用点集

$$\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\}, \left\{\frac{k^2}{p^2}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant p^2 \tag{23}$$

与

$$\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{k^2}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant p \tag{24}$$

(见 § 4.3) 亦可以得到精密度与定理 1 相同的函数类 $E_s^\alpha(C)$ 上的数值积分公式.

今往研究方幂点集构成的求积公式的下界问题. 取

$$f(\mathbf{x}) = C \sum_{m_1 = -(p-1)}^{p-1}{}' \sum_{m_2 = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}}{(\overline{m}_1 \overline{m}_2)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \tag{25}$$

则 $f \in E_s^\alpha(C)$,

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \tag{26}$$

及

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p^2}\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{a}{p}, \frac{ak}{p}, \cdots, \frac{ak^{s-1}}{p}\right) \\
&= \frac{C}{p^2}\sum_{a=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{m_1=-(p-1)}^{p-1}{}' \sum_{m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{e^{\frac{2\pi i(m_1+m_2k)a}{p}}}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha} \\
&= \frac{C}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\substack{m_1=-(p-1) \\ m_1+m_2k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}}^{p-1}{}' \sum_{m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha} \geqslant Cp^{-1}.
\end{aligned} \tag{27}$$

所以用定理 1 的方法计算 $E_s^\alpha(C)(\alpha>1)$ 的函数的数值积分，确有 $E_s^\alpha(C)$ 中之函数使误差不小于 $Cn^{-\frac{1}{2}}$.

§ 3. 佳点集与数值积分

引理 1. 假定 $\alpha>1$ 及 $a_i\geqslant 0(-\infty<i<\infty)$, 若级数

$$\sum a_i<\infty,$$

则

$$\sum a_i^\alpha \leqslant \left(\sum a_i\right)^\alpha. \tag{1}$$

证. 如果所有的 a_i 皆等于 0, 则(1)式显然成立, 因此假定

$$\sum a_i>0,$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum a_i^\alpha &= \sum_i\left(\frac{a_i}{\sum_j a_j}\right)^\alpha\left(\sum_k a_k\right)^\alpha \\
&\leqslant \left(\sum_k a_k\right)^\alpha \sum_i \frac{a_i}{\sum_j a_j} \leqslant \left(\sum a_k\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

引理证完.

命 $\alpha>0$, l 为最小的整数 $\geqslant\alpha$ 及 $\mu_{n,l,k}$ 为由下式定义的整数贯

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} z^k\right)^l = \sum_{k=-nl}^{nl} \mu_{n,l,k} z^k. \qquad (2)$$

定理 1. 假定 $\alpha > 1$及 $\boldsymbol{\gamma}$ 为实矢量，若对于任何整矢量 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 皆有

$$\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle > b\|\mathbf{m}\|^{-a}, \qquad (3)$$

此处 $s \geqslant a \geqslant 1$ 及 $b > 0$ 为常数，则

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{(2n+1)^l} \sum_{k=-nl}^{nl} \mu_{n,l,k} f(k\boldsymbol{\gamma}) \right|$$

$$\leqslant C \cdot c(b, \alpha, s) n^{-\alpha + \frac{s\alpha^2(a-1)}{a-1}} (\log 3n)^{\alpha + s\alpha\delta_{1,a}}. \qquad (4)$$

证. 由(2)式可知，当 $f \in E_s^\alpha(C)$ 时有

$$\frac{1}{(2n+1)^l} \sum_{k=-nl}^{nl} \mu_{n,l,k} f(k\boldsymbol{\gamma})$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^l} \sum C(\mathbf{m}) \sum_{k=-nl}^{nl} \mu_{n,l,k} e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}$$

$$= C(\mathbf{0}) + \frac{1}{(2n+1)^l} \sum' C(\mathbf{m}) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k} \right)^l,$$

所以

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{(2n+1)^l} \sum_{k=-nl}^{nl} \mu_{n,l,k} f(k\boldsymbol{\gamma}) \right|$$

$$\leqslant C \sum' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha} \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k} \right|^l$$

$$= C(\Sigma_1 + \Sigma_2). \qquad (5)$$

此处 Σ_1 表示关于满足于 $|m_i| \leqslant n^{\frac{a}{a-1}}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 的 $\mathbf{m}$ 求和，而 Σ_2 则表示其余部分.

由引理 3.9.1 可知

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k} \right| \leqslant \min\left(2n+1, \frac{1}{2\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle}\right),$$

所以由引理 1 及引理 3.9.5 得

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{1}{2^\alpha(2n+1)^\alpha} \sum_{|m_i| \leqslant n^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha \langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle^\alpha}$$

$$\leqslant c(\alpha) n^{-\alpha} \left(\sum_{|m_i| \leqslant n^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\| \langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \right)^\alpha$$

$$\leqslant c(b, \alpha, s) n^{-\alpha + \frac{s\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-1}} (\log 3n)^{\alpha + s\alpha\delta_{1,\alpha}}. \tag{6}$$

由于

$$\sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} n^{-(\alpha-1)},$$

所以

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{i=1}^{s} \sum_{|m_i| > n^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \frac{1}{|m_i|^\alpha} \sum \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha} \leqslant c(\alpha, s) n^{-\alpha}. \tag{7}$$

由(5),(6),(7)即得定理.

定理 2. 假定 $0 < \alpha \leqslant 1$，则在定理 1 的条件下有

$$\sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k\boldsymbol{\gamma}) \right|$$
$$\leqslant C \cdot c(b, \alpha, s) n^{-\alpha + s(\alpha-1)} (\log 3n)^{s-1+s\delta_{1,\alpha}}. \tag{8}$$

证. 假定 $f \in Q_s^\alpha(C)$. 命

$$S(f) = \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k\boldsymbol{\gamma}), \tag{9}$$

则由定理 6.3.3 可知

$$S(f) = \sum{}'' S(\varphi_{\mathbf{t}}),$$

此处

$$S(\varphi_{\mathbf{t}}) = \int_{G_s} \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}(k\boldsymbol{\gamma}), \tag{10}$$

因而

$$\sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} |S(f)| \leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{11}$$

此处

$$\Sigma_1 = \sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_i \geqslant \log_2 n}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})| \tag{12}$$

与

$$\sum\nolimits_2 = \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0<\log_2 n}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})|. \tag{13}$$

与(2.16)的证明相同可得

$$\sum\nolimits_1 \leqslant C \cdot c(s) \sum_{t_0\geqslant\log_2 n}'' 2^{-\alpha t_0} \leqslant C \cdot c(\alpha, s)n^{-\alpha}(\log 3n)^{s-1}. \tag{14}$$

由于当 $\|\mathbf{m}\| \geqslant 2^{t_0}$时，$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) = 0$,所以由引理 3.9.1 得

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}(k\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\|\mathbf{m}\|<2^{t_0}} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}$$

$$= nC_{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) + \sum_{\|\mathbf{m}\|<2^{t_0}}' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k},$$

$$|S(\varphi_{\mathbf{t}})| \leqslant n^{-1} \sum_{\|\mathbf{m}\|<2^{t_0}}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| \frac{1}{2\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle}, \tag{15}$$

从而由(15),(6.3.17),定理 6.3.2 与引理 3.9.5 得

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &\leqslant \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} n^{-1} \sum_{\|\mathbf{m}\|<n}' \frac{1}{\langle(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})\rangle} \sum'' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| \\
&\leqslant \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} n^{-1} \sum_{\|\mathbf{m}\|<n}' \frac{|C(\mathbf{m})|}{\langle(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})\rangle} \\
&\leqslant C \cdot c(\alpha, s)n^{-1} \sum_{\|\mathbf{m}\|<n}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \\
&\leqslant C \cdot c(\alpha, s)n^{-1} \sum_{\|\mathbf{m}\|<n} \frac{n^{1-\alpha}}{\|\mathbf{m}\|\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle} \\
&\leqslant C \cdot c(b, \alpha, s)n^{-\alpha+s(\alpha-1)}(\log 3n)^{1+s\delta_{1,\alpha}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

由(9),(11),(14),(16)即得定理.

当 $\alpha = 2$ 时，加权数 $\mu_{n,l,k}$ 还可以更简单些，为此，先证下面的引理.

引理 2. 命 δ 为一实数,则

$$\left| \sum_{k=-(n-1)}^{n} (n - |k|)e^{2\pi ik\delta} \right| \leqslant \min\left(n^2, \frac{1}{4\langle\delta\rangle^2}\right). \tag{17}$$

证. 首先有

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}1=n^2, \qquad (18$$

由于当 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}$ 时有 $\sin\pi\delta\geqslant 2\delta$，所以当 δ 非整数时有

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)e^{2\pi ik\delta}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}e^{2\pi ik\delta}$$

$$=\frac{1}{\sin\pi\delta}\sum_{j=0}^{n-1}\sin(2j+1)\pi\delta=\left(\frac{\sin n\pi\delta}{\sin\pi\delta}\right)^2\leqslant\frac{1}{4\langle\delta\rangle^2}. \qquad (19)$$

引理证完.

定理 3. 在定理 1 的条件下有

$$\sup_{f\in E_s^2(C)}\left|\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)f(k\boldsymbol{\gamma})\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(b,s)n^{-2+4s(a-1)}(\log 3n)^{2+2s\delta_{1,a}}. \qquad (20)$$

证. 由(18)得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)f(k\boldsymbol{\gamma})$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\sum C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum C(\mathbf{m})\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}$$

$$=C(\mathbf{0})+\sum{}'C(\mathbf{m})n^{-2}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k},$$

故由引理 2 得

$$\sup_{f\in E_s^2(C)}\left|\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)f(k\boldsymbol{\gamma})\right|$$
$$\leqslant Cn^{-2}\sum{}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\min\left(\frac{1}{4\langle(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})\rangle^2},n^2\right).$$

与定理 1 的证明相同即得定理.

用 §4.5 的记号，则由引理 4.5.1，引理 4.5.2 与定理 3 得

定理 4. 下面二求积公式成立

$$\sup_{f\in E_s^2(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)f(k\boldsymbol{\alpha})\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)n^{-2+\varepsilon}. \tag{21}$$

与

$$\sup_{f\in E_s^2(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)f(k\boldsymbol{\beta})\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(\boldsymbol{\beta},\varepsilon)n^{-2+\varepsilon}. \tag{22}$$

由定理 1，2 及引理 4.5.1，4.5.2 亦可得到类似的求积公式.

§4. 数值积分误差的下界估计

定理 1. 对于 G_s 上的任意贯

$$P(k)=(x_1(k),\cdots,x_s(k)),\quad k=1,2,\cdots, \tag{1}$$

在解析函数类上皆不能得到比下面公式更精密的求积公式

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P(k))=O(n^{-1}), \tag{2}$$

此处与“O”有关的常数仅依赖于 f.

证. 尚若定理不真，即存在贯(1)，使对于任何解析函数 f 皆有

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(P(k))=o(n^{-1}), \tag{3}$$

此处与“o”有关的常数仅依赖于 f.

取 $f(\mathbf{x})=g(x_1)$，则由(3)式得

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_1(k))=n\int_0^1 g(x)dx+o(1), \tag{4}$$

因此

$$g(x_1(n))=\sum_{k=1}^{n} g(x_1(k))-\sum_{k=1}^{n-1} g(x_1(k))=\int_0^1 g(x)dx+o(1). \tag{5}$$

特别取 $g(x)=\sin 2\pi x$，则得

$$\sin(2\pi x_1(n)) = o(1), \tag{6}$$

又取 $g(x) = \cos 2\pi x$, 则得

$$\cos(2\pi x_1(n)) = o(1). \tag{7}$$

由(6),(7)可得

$$1 = (\sin(2\pi x_1(n)))^2 + (\cos(2\pi x_1(n)))^2 = o(1), \tag{8}$$

此为矛盾,故得定理.

由定理 1 可见, 对于佳点集贯 $P(k)(k = 1, 2, \cdots)$ 而言, 欲用简单形式的单和

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(P(k))$$

来近似计算 f 在 G_s 上的定积分,误差是较大的. 即使限于解析函数类, 亦不能希望逼近的误差比 $O(n^{-1})$ 更佳. 定理 3.1 虽然很精密, 但缺点在于加权数 $\mu_{n,l,k}$ 的计算太复杂, 且这一加权数是与 α 有关的.

§5. 同余式的解与数值积分

命 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s)$ 为整矢量及 $M \geqslant 1$.

定理 1. 假定 $\alpha > 1$, 若同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n} \tag{1}$$

在区域

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant M, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

中无解,则

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\right| \leqslant C\cdot c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{3}$$

证. 我们显然可以假定 $\varepsilon < \alpha - 1$. 由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum C(\mathbf{m})e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}$$

$$= C(\mathbf{0}) + \sum{}' C(\mathbf{m})\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}$$

$$= C(\mathbf{0}) + \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0 \pmod{n}}{}' C(\mathbf{m}).$$

所以

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\right| \leqslant C \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, n)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}}. \tag{4}$$

命 T_M^l 表示同余式(1)在范围

$$\|\mathbf{m}\| < lM \tag{5}$$

中的解数，此处 l 为正整数，则

$$T_M^l \leqslant c(\varepsilon)^s l^{1+\varepsilon} M^{\varepsilon}. \tag{6}$$

(见引理 3.4.1)．又易知

$$l^{-\alpha}-(l+1)^{-\alpha}=\alpha\int_l^{l+1} x^{-\alpha-1}dx \leqslant \alpha l^{-(\alpha+1)},$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, n)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}} &\leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(T_M^{l+1}-T_M^l)}{(lM)^{\alpha}}\\ &=\sum_{l=1}^{\infty} T_M^{l+1}(l^{-\alpha}-(l+1)^{-\alpha})M^{-\alpha}\\ &\leqslant c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\alpha+\varepsilon}\sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha+\varepsilon}\\ &\leqslant c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\alpha+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{7}$$

由(4),(7)即得定理.

定理 2. 假定 $0<\alpha\leqslant 1$，则在定理 1 的条件下有

$$\sup_{f\in Q_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\right| \leqslant C\cdot c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{8}$$

证. 不妨假定 $\varepsilon<\alpha$，命

$$S(f)=\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right), \tag{9}$$

则由定理 6.3.3 可知

$$S(f)=\sum{}'' S(\varphi_{\mathbf{t}}) \tag{10}$$

此处

$$S(\varphi_{\mathbf{t}})=\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right), \tag{11}$$

所以

$$\sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} |S(f)| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{12}$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0\geqslant\log_2 M}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})| \tag{13}$$

与

$$\sum\nolimits_2 = \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0<\log_2 M}'' |S(\varphi_{\mathbf{t}})|. \tag{14}$$

与 (2.16) 的证明相类似可得

$$\sum\nolimits_1 \leqslant 2C \sum_{t_0>\log_2 M}'' 2^{-\alpha t_0} \leqslant 2C \sum_{t_0>\log_2 M}'' 2^{-(\alpha-\varepsilon)t_0-\varepsilon t_0}$$

$$\leqslant 2CM^{-\alpha+\varepsilon}\left(\sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon t}\right)^s = C\cdot c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{15}$$

又由于当 $\|\mathbf{m}\| \geqslant 2^{t_0}$ 时有 $C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) = 0$ 及

$$|S(\varphi_{\mathbf{t}})| = \left|\sum C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}\right|$$

$$\leqslant \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, n)}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|,$$

所以

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, n)}' \sum_{t_0<\log_2 M}'' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})| = 0. \tag{16}$$

由(12),(15)及(16)即得定理.

在定理 1 的证明中,用估计

$$T_M^l \leqslant c(s,\varepsilon) l(\log 3lM)^{s-1} \tag{17}$$

来代替(6)式(见引理 3.5.3),又在定理 2 的证明中,用引理 2.1 来估计 $\sum_1$,则得

定理 3. 在定理 1, 2 的假定下,可以将(3)式与(8)式之右端换为 $C\cdot c(\alpha,s)M^{-\alpha}(\log 3M)^{s-1}$.

用 § 4.6 与 § 4.7 的记号,由定理 1.3.1,定理 2.8.1,引理 3.8.1 与引理 5.1 可得下列二引理.

引理 1. 同余式

$$c_1m_1 + c_2m_2 + \cdots + c_sm_s \equiv 0 \pmod n, \quad s = \frac{p-1}{2} \tag{18}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant c(\mathscr{R}_s, \varepsilon) n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}-\varepsilon}, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{19}$$

中无解.

引理 2. 同余式

$$m_1 + F_n(2)m_2 + \cdots + F_n(s)m_s \equiv 0 \pmod{F_n} \tag{20}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant c(\eta) F_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s+1}\log 2}+\frac{1}{2^{2s+3}}}, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{21}$$

中无解.

由定理 1 及引理 1, 引理 2 立即推出

定理 4. 假定 $\alpha > 1$ 及 $s = \dfrac{p-1}{2}$, 则得

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{c_1k}{n}, \frac{c_2k}{n}, \cdots, \frac{c_sk}{n}\right) \right|$$
$$\leqslant C \cdot c(\mathscr{R}_s, \alpha, \varepsilon) n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2(s-1)}+\varepsilon} \tag{22}$$

与

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{k}{F_n}, \frac{F_n(2)k}{F_n}, \cdots, \frac{F_n(s)k}{F_n}\right) \right|$$
$$\leqslant C \cdot c(\eta, \alpha) F_n^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2^{s+1}\log 2}-\frac{\alpha}{2^{2s+4}}}. \tag{23}$$

用定理 3 代替定理 1, 定理 2.8.2 代替定理 2.8.1, 则得

定理 5. 当 $s = 2$ 时, (23) 之右端可以换为 $C \cdot c(\eta, \alpha) \cdot F_n^{-\alpha} \log 3F_n$,而当 $s = 3$ 时,(23)之右端可以换为 $C \cdot c(\eta, \alpha, \varepsilon) \cdot F_n^{-\frac{3}{4}+\varepsilon}$.

用定理 2 代替定理 1, 则可得到函数类 $Q_s^\alpha(C)$ 上相应的求积公式.

§6. 完全佳格点集与数值积分

引理1. 当 $\alpha>1$ 及 $n\geqslant 1$ 时有

$$\sum_{\|\mathbf{m}\|\leqslant n} 1\leqslant 3^s n(\log 3n)^{s-1} \tag{1}$$

与

$$\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant n}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}\leqslant (5\zeta(\alpha))^s n^{-\alpha+1}(\log 3n)^{s-1}. \tag{2}$$

证. 1) 当 $s=1$ 时，(1) 式显然成立，现在假定 $k\geqslant 1$ 及当 $s\leqslant k$ 时，(1)式成立，则

$$\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant n} 1=\sum_{\bar{m}_1\leqslant n}\sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{n}{\bar{m}_1}} 1\leqslant 3^k n(\log 3n)^{k-1}\sum_{\bar{m}_1\leqslant n}\frac{1}{\bar{m}_1}$$
$$<3^{k+1}n(\log 3n)^k,$$

故由归纳法即得(1)式.

2) 当 $s=1$ 时，

$$\sum_{\bar{m}\geqslant n}\frac{1}{\bar{m}^\alpha}=2\sum_{m\geqslant n}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\frac{2}{n^\alpha}+2\int_n^\infty\frac{dt}{t^\alpha}$$
$$=\frac{2}{n^\alpha}+\frac{2}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}<5\zeta(\alpha)n^{-\alpha+1}.$$

现在假定 $k\geqslant 1$ 及当 $s\leqslant k$ 时,(2)式成立,则

$$\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\geqslant n}\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1})^\alpha}=\sum_{\bar{m}_1\leqslant n}\frac{1}{\bar{m}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k-1}\geqslant\frac{n}{\bar{m}_1}}\frac{1}{(\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1})^\alpha}$$
$$+\sum_{\bar{m}_1>n}\frac{1}{\bar{m}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\geqslant 1}\frac{1}{(\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1})^\alpha}$$
$$<(5\zeta(\alpha))^k n^{-\alpha+1}(\log 3n)^{k-1}\sum_{\bar{m}_1\leqslant n}\frac{1}{\bar{m}_1}+(3\zeta(\alpha))^k\sum_{\bar{m}_1>n}\frac{1}{\bar{m}_1^\alpha}$$
$$<3(5\zeta(\alpha))^k n^{-\alpha+1}(\log 3n)^k+(3\zeta(\alpha))^{k+1}n^{-\alpha+1}$$
$$<(5\zeta(\alpha))^{k+1}n^{-\alpha+1}(\log 3n)^k.$$

引理证完.

引理2. 对于任何满足 $0<\delta<1$ 之 δ，皆存在不少于 $p-[\delta p]$ 个整数 a，满足 $1\leqslant a\leqslant p$，使同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = m_1 + m_2 a + \cdots + m_s a^{s-1} \equiv 0 (\bmod p) \tag{3}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant \delta s^{-1} 3^{-s} p (\log 3p)^{-(s-1)} \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{4}$$

中无解.

证. 我们可以假定 $\delta s^{-1} 3^{-s} p(\log 3p)^{-(s-1)} \geqslant 1$, 否则定理显然成立. 由于固定 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 时, 同余式(3)在区间 $1 \leqslant a \leqslant p$ 中的解数不超过 $s-1$ (见引理 4.3.1), 故由引理 1 可知同余式(3)在范围(4)中的解数总和不超过

$$\sum_{\|\mathbf{m}\| \leqslant \delta s^{-1} 3^{-s} p (\log 3p)^{-(s-1)}}' \sum_{\substack{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 (\bmod p) \\ 1 \leqslant a \leqslant p}} 1$$

$$\leqslant (s-1) 3^s (\log 3p)^{s-1} \delta s^{-1} 3^{-s} p (\log 3p)^{-(s-1)} < \delta p,$$

换言之,存在不少于 $p - [\delta p]$ 个整数 a, 满足 $1 \leqslant a \leqslant p$, 使同余式(3)在(4)中无解. 引理证完.

定理 1. 存在仅与 p 有关的整矢量 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s)$ 使

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right) \right|$$

$$< C \cdot c(\alpha, s) p^{-\alpha} (\log p)^{(\alpha+1)(s-1)}, \quad \text{当 } \alpha > 1 \tag{5}$$

与

$$\sup_{f \in Q_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right) \right|$$

$$< C \cdot c(\alpha, s) p^{-\alpha} (\log p)^{(\alpha+1)(s-1)}, \quad \text{当 } 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

证. 取 $\delta = \frac{1}{2}$, 则由引理 2 可知至少有 $\frac{p+1}{2}$ 个整数 a 适合于 $1 \leqslant a \leqslant p$, 使同余式(3)在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant 2^{-1} s^{-1} 3^{-s} p (\log 3p)^{-(s-1)}, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{7}$$

中无解. 任取一个 a, 并命 $a_1 = 1$, $a_2 = a, \cdots, a_s = a^{s-1}$, 则由定理 5.3 即得定理.

以下我们将给这一结果以另外的证明, 并对表达式(5), (6)略加改进.

定理 2. 假定 $\alpha > 1$, 则存在仅与 p 有关的整矢量 $\mathbf{a}$ 使

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right)\right|$$
$$< C\cdot(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}(\log 3p)^{\alpha(s-1)}. \tag{8}$$

证. 由 (5.4) 可知

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right)\right|\leqslant C\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}. \tag{9}$$

将区间 $1\leqslant a\leqslant p$ 中，使同余式(3)在范围(7)中无解的整数 a 的全体记为 A，则由引理 2 可知 A 的元素个数不少于 $\frac{p+1}{2}\left(\text{取 } \delta=\frac{1}{2}\right)$. 记 $\mathbf{a}=(1, a, \cdots, a^{s-1})$, $M=2^{-1}s^{-1}3^{-s}p(\log 3p)^{-(s-1)}$ 与

$$\Omega(a)=\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}, \tag{10}$$

则由引理 1 得

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\Omega(a)&=\sum_{a\in A}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}\\
&\leqslant\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant M}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)\\ 1\leqslant a\leqslant p}}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}\\
&\leqslant p\sum{}'\frac{1}{\|p\mathbf{m}\|^\alpha}+(s-1)\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant M}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}\\
&< s(2\zeta(\alpha)+1)^s p^{-\alpha+1}+s(5\zeta(\alpha))^s(\log 3p)^{s-1}M^{-\alpha+1}\\
&<\frac{1}{3}(2s)^\alpha(3^\alpha 5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha+1}(\log 3p)^{\alpha(s-1)}.\end{aligned} \tag{11}$$

在集合 A 中，至多有 $\left[\frac{p}{3}\right]$ 个 a，它所对应的 $\Omega(a)$ 适合于

$$\Omega(a)\geqslant(2s)^\alpha(3^\alpha\cdot 5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}(\log 3p)^{\alpha(s-1)}. \tag{12}$$

倘若不然，则

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\Omega(a)&\geqslant\left(\left[\frac{p}{3}\right]+1\right)(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}(\log 3p)^{\alpha(s-1)}\\
&>\frac{1}{3}(2s)^\alpha(3^\alpha\cdot 5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha+1}(\log 3p)^{\alpha(s-1)},\end{aligned} \tag{13}$$

这与(11)相矛盾．由于

$$\frac{p+1}{2}-\left[\frac{p}{3}\right]\geqslant 1,$$

所以在 A 中至少有一个 a 使

$$\Omega(a)<(2s)^{\alpha}(3^{\alpha}\cdot 5\zeta(\alpha))^{s}p^{-\alpha}(\log 3p)^{\alpha(s-1)}, \tag{14}$$

取 $\mathbf{a}=(1, a, \cdots, a^{s-1})$，则由(9),(10),(14)即得定理．

定理 3. 假定 $0<\alpha\leqslant 1$，则存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使

$$\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}\left|\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right)\right|$$
$$<C\cdot c(\alpha, s, \varepsilon)p^{-\alpha}(\log p)^{s-1+\varepsilon}. \tag{15}$$

证．由(5.9),(5.12)与(2.16)可知

$$\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}\left|\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right)\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(\alpha, s)p^{-\alpha}(\log p)^{s-1}+\Lambda(a), \tag{16}$$

此处 $\mathbf{a}=(1, a, \cdots, a^{s-1})$ 及

$$\Lambda(a)=\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}{}'\sum_{t_0<\log_2 p}{}''|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|. \tag{17}$$

沿用定理 2 证明中之记号，则由定理 6.3.2 可知

$$\sum_{a\in A}\Lambda(a)=\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}\sum_{a\in A}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}{}'\sum_{t_0<\log_2 p}{}''|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|$$
$$\leqslant\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}\sum_{M<\|\mathbf{m}\|<p}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\,\mathbf{m})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)\\ 1\leqslant a\leqslant p}}\sum{}''|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|$$
$$\leqslant\sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)}(s-1)\sum_{M<\|\mathbf{m}\|<p}|C(\mathbf{m})|$$
$$=C\cdot c(\alpha, s)\sum_{M<\|\mathbf{m}\|<p}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}}$$
$$=C\cdot c(\alpha, s)\sum_{M<\|\mathbf{m}\|<p}\frac{\|\mathbf{m}\|^{1-\alpha+\frac{\varepsilon}{s}}}{\|\mathbf{m}\|^{1+\frac{\varepsilon}{s}}}$$
$$\leqslant C\cdot c(\alpha, s)p^{1-\alpha+\frac{\varepsilon}{s}}\sum_{\|\mathbf{m}\|>M}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{1+\frac{\varepsilon}{s}}}, \tag{18}$$

故由引理1得

$$\sum_{a\in A}\wedge(a)\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)p^{1-\alpha+\frac{\varepsilon}{s}}M^{-\frac{\varepsilon}{s}}(\log M)^{s-1}$$

$$\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)p^{1-\alpha}(\log p)^{s-1+\varepsilon}. \tag{19}$$

在 A 中必有一个 a，它所对应的 $\wedge(a)$ 适合于

$$\wedge(a)\leqslant\frac{2}{p+1}\sum_{a\in A}\wedge(a)\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)p^{-\alpha}(\log p)^{s-1+\varepsilon}, \tag{20}$$

取 $\mathbf{a}=(1,a,\cdots,a^{s-1})$，则由(16),(17),(20)即得定理.

§7. 再论数值积分误差的下界估计

定理1. 任意给出 G_s 的 n 个点

$$P(k)=(x_1^{(k)},\cdots,x_s^{(k)}),\quad k=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

皆存在 $f\in E_s^\alpha(C)$ 满足

$$f(P(k))=0,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

与

$$\int_{G_s}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\geqslant C\cdot c(\alpha,s)n^{-\alpha}(\log 3n)^{s-1}. \tag{3}$$

证. 1) 假定 t 为整数 $\geqslant 1$ 及 $2^{t-1}\leqslant n<2^t$，则任意添加 2^t-n 个点

$$P(k)=(x_1^{(k)},\cdots,x_s^{(k)}),\quad k=n+1,\cdots,2^t,$$

考虑所有的整矢量

$$\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_s),$$

此处 $r_1+\cdots+r_s=t$，$r_i\geqslant 0\,(1\leqslant i\leqslant s)$，命 $M(\mathbf{r})$ 表示适合于

$$\bar{m}_i\leqslant 2^{r_i},\quad i=1,2,\cdots,s$$

的整矢量 $\mathbf{m}$ 的集合，则显然 $M(\mathbf{r})$ 的元素个数不少于 $2^{t+1}+1$.

首先证明对于每一矢量 $\mathbf{r}$，皆有三角多项式

$$T_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{m}\in M(\mathbf{r})}C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}\not\equiv 0 \tag{4}$$

使

$$T_{\mathbf{r}}(P(k)) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, 2^t. \tag{5}$$

这是由于(5)式为以 Fourier 系数 $C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m})$ 为变数的一个线性方程组，变数的个数多于方程的个数，所以可以确定非全为零之诸 $C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m})$，使 $T_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ 满足(4)与(5).

2) 命

$$T_{\mathbf{r}}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{T_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{m}', \mathbf{x})}}{C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m}') 2^{\alpha t}}, \tag{6}$$

此处 $\mathbf{m}' = (m_1', \cdots, m_s')$ 及

$$|C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m}')| = \max_{\mathbf{m} \in M(\mathbf{r})} |C_{\mathbf{r}}(\mathbf{m})|. \tag{7}$$

今往证明可以选取常数 $\chi = c(\alpha, s)$ 使

$$f(\mathbf{x}) = C\chi \sum_{\mathbf{r}} T_{\mathbf{r}}^{(0)}(\mathbf{x}) \in E_s^{\alpha}(C). \tag{8}$$

由于 $e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})}$ 仅仅只可能出现于这样的三角多项式 $T_{\mathbf{r}}^{(0)}(\mathbf{x})$，此处

$$\overline{m}_1 \leqslant 2^{r_1+1}, \cdots, \overline{m}_s \leqslant 2^{r_s+1}, \tag{9}$$

所以

$$\begin{aligned} \log_2 \overline{m}_1 - 1 \leqslant r_1 &= t - r_2 - \cdots - r_s \\ &\leqslant t - \log_2 \overline{m}_2 - \cdots - \log_2 \overline{m}_s + s - 1, \end{aligned}$$

即 r_1 可以取不超过

$$t - \log_2 \overline{m}_1 - \cdots - \log_2 \overline{m}_s + s + 1 = \log_2 \frac{2^t}{\|\mathbf{m}\|} + s + 1 \tag{10}$$

个值. 同理其他的 $r_i (2 \leqslant i \leqslant s)$ 可以取之值亦不超过(10)，即含有因子 $e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})}$ 的三角多项式 $T_{\mathbf{r}}^{(0)}(\mathbf{x})$ 之个数不超过

$$\left(\log_2 \frac{2^{t+s}}{\|\mathbf{m}\|} + 1\right)^s. \tag{11}$$

取

$$\chi = \inf_{0 < y \leqslant 1} y^{-\alpha} \left(\log_2 \frac{1}{y} + 1\right)^{-s}, \tag{12}$$

则显然 $\chi = c(\alpha, s)$，且

$$C\chi \frac{\left(\log_2 \frac{2^{t+s}}{\|\mathbf{m}\|} + 1\right)^s}{2^{\alpha(t+s)}} \leqslant C \|\mathbf{m}\|^{-\alpha}, \tag{13}$$

即 $f\in E_s^\alpha(C)$.

3) 由 (5), (6), (8) 可知 (2) 成立, 又由引理 2.1 可知

$$\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = C\chi 2^{-\alpha t}\sum_{\mathbf{r}} 1 = C\chi 2^{-\alpha t} C_{s-1}^{t+s-1}$$
$$\geqslant C\cdot c(\alpha, s)n^{-\alpha}(\log 3n)^{s-1},$$

即 (3) 式成立. 定理证完.

由定理 1 可知, 定理 3.4 与定理 6.1 都是臻于至善的, 即用 G_s 上的任意 n 个点的加权和来近似计算 $E_s^\alpha(C)$ 上的函数在 G_s 上的定积分, 误差的主阶都不能再作进一步的改进. 而当 $s=2$ 时, 除一常数因子外, 定理 5.5 给出的误差是臻于至善的.

§ 8. 佳点求积公式的平均误差

命

$$c(s, \varepsilon) = 2((2\zeta(1+\varepsilon)+1)^s - 1), \tag{1}$$

此处 $0<\varepsilon<1$, 又命使不等式

$$\langle(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma})\rangle \geqslant \varepsilon c(s, \varepsilon)^{-1}\|\mathbf{m}\|^{-1-\varepsilon} \tag{2}$$

对一切整矢量 $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ 皆成立的 G_s 的点 $\boldsymbol{\gamma}$ 的集合为 $\Omega(=\Omega(\varepsilon))$, 则由定理 4.4.1 的证明可知 Ω 的 Lebesgue 测度 $\operatorname{mes}\Omega$ 适合于

$$\operatorname{mes}\Omega > 1-\varepsilon. \tag{3}$$

当 $f\in Q_s^\alpha(C)\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$ 时, 命

$$S(n, \Omega, f) = \int_\Omega |S(n, \boldsymbol{\gamma}, f)|d\boldsymbol{\gamma}, \tag{4}$$

此处 n 为整数 $\geqslant 2$ 及

$$S(n, \boldsymbol{\gamma}, f) = \int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \frac{1}{(2n+1)^l}\sum_{k=-nl}^{nl}\mu_{n,l,k}f(k\boldsymbol{\gamma}), \tag{5}$$

其中 l 为 $\geqslant \alpha+1$ 的最小整数, $\mu_{n,l,k}$ 则由 (3.2) 定义, 我们则称 $S(n, \Omega, f)$ 为 f 由佳点集合 Ω 构造的求积公式的平均误差.

定理 1. 假定 $\alpha>\frac{1}{2}$, 则

$$\sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} S(n,\Omega,f)\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)n^{-\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{6}$$

证明定理 1 之前先证明下面的引理.

引理 1. 假定 $\alpha>\frac{1}{2}$，若 $f\in Q_s^\alpha(C)$，则

$$\sum|C(\mathbf{m})|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}\leqslant C^2\cdot c(s,\varepsilon), \tag{7}$$

此处 $C(\mathbf{m})$ 表示 f 的 Fourier 系数.

证. 由定义可知

$$\sum_{\mathbf{m}}|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2=\|\varphi_{\mathbf{t}}\|_{L_2}^2\leqslant\|\varphi_{\mathbf{t}}\|^2\leqslant C^2\cdot 2^{-2\alpha t_0}.$$

由于当 $\|\mathbf{m}\|\geqslant 2^{t_0}$ 时，$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})=0$，所以

$$\sum_{\mathbf{m}}|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}\leqslant 2^{2(\alpha-\varepsilon)t_0}\sum_{\mathbf{m}}|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2\leqslant C^2 2^{-2\varepsilon t_0}.$$

从而由 (6.1.9) 与 (6.1.15) 可知

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{m}}|C(\mathbf{m})|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}&=\sum_{\mathbf{m}}\Big|\sum{}''C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})\Big|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}\\&\leqslant\sum_{\mathbf{m}}\Big(\sum_{\mathbf{t}}{}''|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2 2^{\varepsilon t_0}\Big)\Big(\sum_{\mathbf{t}}{}''2^{-\varepsilon t_0}\Big)\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}\\&\leqslant c(s,\varepsilon)\sum_{\mathbf{t}}{}''2^{\varepsilon t_0}\sum_{\mathbf{m}}|C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\varepsilon)}\\&\leqslant C^2\cdot c(s,\varepsilon)\sum_{\mathbf{t}}{}''2^{-\varepsilon t_0}=C^2\cdot c(s,\varepsilon).\end{aligned}$$

引理证完

定理 1 的证明. 不妨假定 $\varepsilon<\alpha-\frac{1}{2}$，由 §3 可知

$$|S(n,\boldsymbol{\gamma},f)|\leqslant\sum{}'\frac{|C(\mathbf{m})|}{(2n+1)^l}\left|\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right|^l, \tag{8}$$

从而由 Schwarz 不等式得

$$S(n,\Omega,f)\leqslant\int_\Omega S_1^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}}d\boldsymbol{\gamma}, \tag{9}$$

此处

$$S_1=\sum{}'|C(\mathbf{m})|^2\frac{\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}}{(2n+1)^2}\left|\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right|^2 \tag{10}$$

与

$$S_2=\sum{}'\frac{1}{(2n+1)^{2(l-1)}\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}}\left|\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right|^{2(l-1)}, \quad (11)$$

由于 $2(l-1)\geqslant 2\alpha>1$ 及 $2\alpha-\varepsilon>1$，所以由定理 3.1 的证明可知

$$S_2\leqslant c(\alpha,s,\varepsilon)n^{-2\alpha+2\varepsilon}, \quad (12)$$

从而由(9)及 Schwarz 不等式可知

$$S(n,\Omega,f)\leqslant c(\alpha,s,\varepsilon)n^{-\alpha+\varepsilon}\int_{G_s}S_1^{\frac{1}{2}}d\boldsymbol{\gamma}$$

$$\leqslant c(\alpha,s,\varepsilon)n^{-\alpha+\varepsilon}\left(\int_{G_s}S_1d\boldsymbol{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

由 (6.2.16) 及引理 1 可知

$$\int_{G_s}S_1d\boldsymbol{\gamma}=\sum{}'|C(\mathbf{m})|\frac{\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}}{(2n+1)^2}\int_{G_s}\left|\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right|^2d\boldsymbol{\gamma}$$

$$=\sum{}'|C(\mathbf{m})|^2\frac{\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}}{(2n+1)^2}\int_{G_s}\left(\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right)$$

$$\times\left(\sum_{j=-n}^{n}e^{-2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})j}\right)d\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{2n+1}\sum{}'|C(\mathbf{m})|^2\|\mathbf{m}\|^{2(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}$$

$$\leqslant C^2\cdot c(s,\varepsilon)n^{-1}. \quad (14)$$

将(14)代入(13)即得定理.

由定理 1 可见,对 $Q_s^\alpha(C)\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$上的函数，用佳点求积公式时，平均误差比单个求积公式的误差精密 $O(n^{-\frac{1}{2}})$ (比较定理 3.1). 因此应用佳点求积公式时,可望实际误差之阶为 $O(n^{-\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

§9. 完全佳格点求积公式的平均误差

命 n 为整数$\geqslant 2$及 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，由引理 6.2 可知适合于 $\frac{n}{2}<p\leqslant n$ 的每一个素数 p,皆存在不少于 $p-[\varepsilon p]\geqslant(1-\varepsilon)p$ 个整矢量 $\mathbf{a}=(1,a,\cdots,a^{s-1})\ (1\leqslant a\leqslant p)$ 使同余式

$$(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p) \quad (1)$$

的非零解 $\mathbf{m}$ 适合于

$$\|\mathbf{m}\| \geqslant \varepsilon s^{-1}3^{-s}p(\log 3p)^{-(s-1)} \geqslant \varepsilon 2^{-1}s^{-1}3^{-s}n(\log n)^{-(s-1)}$$
$$= M \text{ (定义)}. \tag{2}$$

命 $\omega(=\omega(\varepsilon, n))$ 表示所有这种 $(\mathbf{a}, p)$ 所成的集合. ω 的元素个数记为 $|\omega|$，则由素数定理(见华罗庚[1]第九章)可知

$$|\omega| \geqslant \sum_{\frac{n}{2}<p\leqslant n} (1-\varepsilon)p \geqslant \frac{cn^2}{\log n}. \tag{3}$$

当 $f \in Q_s^\alpha(C)$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$时，命

$$S(n, \omega, f) = \frac{1}{|\omega|} \sum_{(\mathbf{a},p)\in\omega} |S(p, \mathbf{a}, f)|, \tag{4}$$

此处

$$S(p, \mathbf{a}, f) = \int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{p}\right). \tag{5}$$

我们称 $S(p, \mathbf{a}, f)$ 为 f 由佳格点集合 ω 构造的求积公式的平均误差.

定理 1. 假定 $\alpha > \frac{1}{2}$，则

$$\sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} S(n, \omega, f) \leqslant C \cdot c(\alpha, s, \varepsilon) n^{-\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{6}$$

证明定理 1 之前先证明下面的引理.

引理 1. 有下面的估计

$$A(\omega, \mathbf{m}) = \sum_{\substack{(\mathbf{a},\ p)\in\omega \\ (\mathbf{a},\ \mathbf{m})\equiv 0 \pmod p}} 1 \leqslant n\log_{\frac{n}{2}}(s\|\mathbf{m}\|n^{s-1}). \tag{7}$$

证. 命$\sigma_m(l)$ 表示正整数 l 的不小于m 的素因子的个数，则

$$\sigma_m(l) \leqslant \log_m l.$$

所以

$$A(\omega, \mathbf{m}) \leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant p} \sum_{\substack{\frac{n}{2}<p\leqslant n \\ (\mathbf{a},\ \mathbf{m})\equiv 0 \pmod p}} 1$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant n} \sigma_{\frac{n}{2}}((\mathbf{a},\ \mathbf{m})) \leqslant n\log_{\frac{n}{2}}(s\|\mathbf{m}\|n^{s-1}).$$

引理证完.

定理 1 的证明. 不妨假定 $\varepsilon < \alpha - \frac{1}{2}$, 由 § 5 可知

$$|S(p, \mathbf{a}, f)| = \left| \sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod p}' C(\mathbf{m}) \right|, \tag{8}$$

从而由(3),引理 8.1 及 Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}
S(n, \omega, f) &\leqslant \frac{1}{|\omega|} \sum_{(\mathbf{a}, p) \in \omega} \sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod p}' |C(\mathbf{m})| \\
&= \frac{1}{|\omega|} \sum_{\|\mathbf{m}\| \geqslant M} A(\omega, \mathbf{m}) |C(\mathbf{m})| \\
&\leqslant \frac{1}{|\omega|} \left(\sum |C(\mathbf{m})|^2 \|\mathbf{m}\|^{2(\alpha - \frac{\varepsilon}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\sum_{\|\mathbf{m}\| \geqslant M} A(\omega, \mathbf{m})^2 \|\mathbf{m}\|^{-2(\alpha - \frac{\varepsilon}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \cdot c(s, \varepsilon) n^{-2} (\log n) \\
&\quad \times \left(\sum_{\|\mathbf{m}\| \geqslant M} n^2 (1 + \log_{\frac{n}{2}} \|\mathbf{m}\|) \|\mathbf{m}\|^{-2(\alpha - \frac{\varepsilon}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \cdot c(s, \varepsilon) n^{-1} (\log n) \left(\sum_{\|\mathbf{m}\| \geqslant M} \frac{\|\mathbf{m}\|^{-2\alpha + 1 + \frac{3}{2}\varepsilon} \log \|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{m}\|^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \cdot c(s, \varepsilon) n^{-1} (\log n) M^{-\alpha + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon} \left(\sum \frac{\log \|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{m}\|^{1 + \frac{\varepsilon}{2}}} \right) \\
&\leqslant C \cdot c(s, \varepsilon) n^{-\alpha - \frac{1}{2} + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

定理证完.

由定理 1 可见,对于 $Q_s^\alpha(C)$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ 上的函数, 用完全佳格点求积公式时, 平均误差比单个求积公式的误差精密 $O(n^{-\frac{1}{2}})$ (比较定理 6.1),因此应用完全佳格点求积公式时,可望实际误差之阶为 $O(n^{-\alpha - \frac{1}{2} + \varepsilon})$.

注 释

§ 2. 当 $\alpha > 1$ 时, 首先是 Коробов, Н. М.[1] 就点集 $\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\},\right.$

$\cdots, \left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right)$，$(1 \leqslant k \leqslant p^2)$ 证明了与定理 1 同样强度的结果，定理 1 见华罗庚与王元 [3]．关于定理 2，当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，是 Шахов, Ю. Н.[4] 证明的(参看 Солодов, В. М.[1])．当 $\frac{1}{2} \geqslant \alpha > 0$时，见华罗庚与王元 [6, 7]．

§ 3. 定理 1 首先是 Бахвалов, Н. С.[1] 与 Haselgrove, C. B.[1] 证明的(参看王元[2], Коробов, Н. М. [7]，华罗庚与王元 [3, 6, 7], Niederreiter, H.[2])．关于定理 2，参看 Бахвалов, Н. С.[4]，华罗庚与王元 [6, 7]．

§ 4. 关于定理 1，参看 Гельфанд, И. М. Фролов, А. С. 与 Ченчов, Н. Н.[1]，Коробов, Н. М.[7]．

§ 5. 关于定理 3，见 Бахвалов, Н. С. [1] (参看华罗庚与王元[3,6,7])．

§ 6. 定理 2 最早由 Коробов, Н. М.[2] 证明，但误差为 $O(p^{-\alpha}(\log p)^{\alpha s})$，后来 Бахвалов, Н. С.[1] 将误差改进为 $O(p^{-\alpha}(\log p)^{\alpha(s-1)})$．这里的证明是根据 Бахвалов, Н. С. 的证明方法略加简化而得来的 (见王元 [2])．关于引理 2，Zaremba, S. K.[3] 证明，对于整数 $n > 1$，亦存在整矢量 $\mathbf{a}$，使同余式 $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$ 在范围 $\|\mathbf{m}\| \leqslant cn^{-1}(\log n)^{s-1}$ 中无非无聊解．

§ 7. 见 Шарыгин, И. Ф.[2]．

§§ 8—9. 见 Бахвалов, Н. С.[1,2] (参看王元[2])．

第八章　数值积分的数值误差

§1. 数值误差表示法

引入记号

$$S(n, \boldsymbol{\gamma}, f)=\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}-\frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right) f(k\boldsymbol{\gamma}) \quad (1)$$

及

$$S(n, \mathbf{h}, f)=\int_{G_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{h}}{n}\right), \quad (2)$$

此处$\boldsymbol{\gamma}$与$\mathbf{h}$分别表示s维实矢量与整矢量.

本节将证明

定理 1. 假定$1, \gamma_1, \cdots, \gamma_s$在有理数域$R$上线性独立,则有下面的估计

$$\sup_{f \in E_s^2(C)}|S(n, \boldsymbol{\gamma}, f)| \leqslant C W_2(n, \boldsymbol{\gamma}), \quad (3)$$

此处

$$W_2(n, \boldsymbol{\gamma})=\frac{1}{n}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\right)^s+\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

$$\times \prod_{\nu=1}^{s}\left(1+2\pi^2 B_2(\{k\gamma_\nu\})\right)-1, \quad (4)$$

其中$B_2(x)=x^2-x+\dfrac{1}{6}$为 Bernoulli 多项式(见 §6.5).

定理 2. 有下面的估计

$$\sup_{f \in E_s^2(C)}|S(n, \mathbf{h}, f)| \leqslant C W_2(n, \mathbf{h}), \quad (5)$$

此处

$$
W_2(n,\mathbf{h})=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{\pi^2}{3}\right)^s+\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\nu=1}^{s}\left(1+2\pi^2B_2\left(\left\{\dfrac{kh_\nu}{n}\right\}\right)\right) \\ \qquad -1, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } 2\nmid n, \\ \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{\pi^2}{3}\right)^s+\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{\pi^2}{6}\right)^\mu\left(1+\dfrac{\pi^2}{3}\right)^{s-\mu} \\ \qquad +\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(1+2\pi^2B_2\left(\left\{\dfrac{kh_\nu}{n}\right\}\right)\right)-1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } 2\mid n,\end{cases} \tag{6}
$$

其中 μ 表示 $h_\nu(1\leqslant\nu\leqslant s)$ 中奇整数的个数.

引理 1. 有下面的表达式

$$
\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\overline{m}^2}=1+2\pi^2B_2(\{x\}). \tag{7}
$$

证. 由于

$$
\int_0^1(1+2\pi^2B_2(x))e^{-2\pi imx}dx
$$

$$
=\int_0^1\left(1-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{2}(1-2x)^2\right)e^{-2\pi imx}dx=\overline{m}^{-2},
$$

故得引理.

定理 1 的证明. 由引理 7.3.2 与定理 7.3.3 的证明可知

$$
W_2(n,\boldsymbol{\gamma})=n^{-2}{\sum}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\left|\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}\right|
$$

$$
=n^{-2}{\sum}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k},
$$

所以由 (7.3.18) 与引理 1 得

$$
W_2(n,\boldsymbol{\gamma})=n^{-2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}\left(\sum\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}e^{2\pi i(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma})k}-1\right)
$$

$$
=n^{-2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi im_\nu\gamma_\nu k}}{\overline{m}_\nu^2}\right)-1
$$

$$
=n^{-2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j}\prod_{\nu=1}^{s}(1+2\pi^2B_2(\{k\gamma_\nu\}))-1
$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{n-|k|}{n}\right) \prod_{\nu=1}^{s} (1 + 2\pi^2 B_2(\{k\gamma_\nu\})) - 1.$$

由引理 1 可知 $B_2(\{x\})$ 是 x 的偶函数，故得(4)式. 定理证完.

定理 2 的证明. 习知

$$W_2(n, \mathbf{a}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum{}' \frac{e^{\frac{2\pi i(\mathbf{h},\mathbf{m})k}{n}}}{\|\mathbf{m}\|^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i h_\nu m_\nu k}{n}}}{\overline{m}_\nu^2} \right) - 1$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{s} \left(1 + 2\pi^2 B_2\left(\left\{\frac{kh_\nu}{n}\right\}\right)\right) - 1,$$

由于 $B_2(\{x\})$ 为偶函数，故得定理.

命

$$\sup_{f \in E_s^4(C)} |S(n, \mathbf{h}, f)| \leqslant C W_4(n, \mathbf{h}), \tag{8}$$

则类似于定理 2, 可以证明

定理 3. 有下面的估计

$$W_4(n, \mathbf{h}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\pi^4}{45}\right)^s + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\nu=1}^{s} \left(1 - \dfrac{2\pi^4}{3} B_4\left(\left\{\dfrac{kh_\nu}{n}\right\}\right)\right) \\ \quad - 1, \qquad \text{当 } 2 \nmid n, \\ \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{\pi^4}{45}\right)^s + \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{7\pi^4}{360}\right)^\mu \left(1 + \dfrac{\pi^4}{45}\right)^{s-\mu} \\ \quad + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \prod_{\nu=1}^{s} \left(1 - \dfrac{2\pi^4}{3} B_4\left(\left\{\dfrac{kh_\nu}{n}\right\}\right)\right) - 1, \\ \qquad \text{当 } 2 \mid n, \end{cases} \tag{9}$$

其中 μ 表示诸 $h_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant s)$ 中奇整数的个数.

我们还可以逐个求出

$$\sup_{f \in E_s^{2l}(C)} |S(n, \mathbf{h}, f)|, \quad l = 3, 4, \cdots \tag{10}$$

的上界表达式.

§2. 佳点集计算比较

我们分别用实分圆域，实 Dirichlet 域与定理 4.5.2 来构造实矢量 $\boldsymbol{\gamma}$, 并用定理 1.1 来进行计算比较, 在电子计算机上算出以下诸表:

表 1 $s=3$

n	$W_2(n,(e,e^2,e^3))$	$W_2\left(n,\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\sqrt{2},\sqrt{10}\right)\right)$
10^2	3.7687×10^{-1}	3.1740×10^{-1}
5×10^2	3.4290×10^{-2}	5.3640×10^{-2}
10^3	1.1180×10^{-2}	2.2850×10^{-2}

表 2 $s=4$

n	$W_2\left(n,\left(2\cos\frac{2\pi}{11},\cdots,2\cos\frac{8\pi}{11}\right)\right)$	$W_2(n,(e,\cdots,e^4))$
10^3	1.5683×10^{-1}	6.4835×10^{-1}
1.5×10^3	1.0070×10^{-1}	5.5341×10^{-1}
3×10^3	4.0200×10^{-2}	3.7821×10^{-1}

表 3 $s=5$

n	$W_2\left(n,\left(2\cos\frac{2\pi}{13},\cdots,2\cos\frac{10\pi}{13}\right)\right)$	$W_2(n,(e,\cdots,e^5))$
10^4	6.7819×10^{-2}	7.4518×10^{-2}
10^5	3.6400×10^{-3}	3.6966×10^{-3}

表 4 $s=7$

n	$W_2\left(n,\left(2\cos\frac{2\pi}{17},\cdots,2\cos\frac{14\pi}{17}\right)\right)$	$W_2(n,(e,\cdots,e^7))$	$W_2\left(n,\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\sqrt{2},\cdots,\sqrt{30}\right)\right)$
10^3	2.6730×10	3.1621×10	2.8308×10
10^4	2.1492	2.2513	3.9925
10^5	1.9503×10^{-1}	1.9592×10^{-1}	3.0794×10^{-1}

附记.

不少数学家曾建议用实 Dirichlet 域来构造佳点集，例如 Davis, P. J; 与 Rabinowitz, P.[1]. 但从这些计算中，我们建议最好还是采用实分圆域或 $\boldsymbol{\gamma}=(e,\cdots,e^s)$.

§3. η 点集的算法

取 s 维广义 Fibonacci 贯 $F_n(\equiv F_n^{(s)})$，即由下面递推公式定义的整数贯

$$F_0=F_1=\cdots=F_{s-2}=0,\quad F_{s-1}=1,$$
$$F_{n+s}=F_{n+s-1}+\cdots+F_{n+1}+F_n,\quad n\geqslant 0,$$

(见 §2.8).

命 $n=F_m$, $h_1=1$, $h_2=F_{m+1}-F_m$, $\cdots$, $h_s=F_{m+s-1}-F_{m+s-2}-\cdots-F_{m+1}-F_m$, 则得 η 点集(见 §4.7).

例 1. 当 $0\leqslant m\leqslant 15$ 时，$F_m^{(2)}$ 依次为 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. 由计算可得

$$W_2(55,(1,34))\leqslant 3.8148\times10^{-2}.$$

例 2. $s=4$. n 分别取作 $F_{13}=401$, $F_{16}=2{,}872$, $F_{18}=10{,}671$, 则由计算可得

表 1 ($h_1 = 1$)

n	h_2	h_3	h_4	$W_2(n, \mathbf{h})$
401	372	316	208	1.5260×10^{-1}
2,872	2,664	2,263	1,490	2.3845×10^{-2}
10,671	9,898	8,408	5,536	3.8520×10^{-3}

例 3. $s = 5$. 取 $n = F_{19} = 13{,}624$, $h_1 = 1$, $h_2 = 13{,}160$, $h_3 = 12{,}248$, $h_4 = 10{,}455$, $h_5 = 6{,}930$, 则

$$W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 3.0738 \times 10^{-2}.$$

例 4. $s = 6$. 取 $n = F_{21} = 29{,}970$, $h_1 = 1$, $h_2 = 29{,}478$, $h_3 = 28{,}502$, $h_4 = 26{,}566$, $h_5 = 22{,}726$, $h_6 = 15{,}109$, 则

$$W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 1.2002 \times 10^{-1}.$$

当 $s \geqslant 7$ 时,也可以算出一批数据来,但精密度较差(见 §7).

当 $s = 3$ 时,建议用下面的递推贯,即

$$G_0 = G_1 = 0, \quad G_2 = 1, \quad G_{m+3} = G_{m+1} + G_m, \quad m \geqslant 0.$$

(见 §1.7). 定义 $n = G_m$, $h_1 = 1$, $h_2 = G_{m+1} - G_m$, $h_3 = G_{m+2} - G_m$, 经计算可得

表 2 ($h_1 = 1$)

n	h_2	h_3	$W_2(n, \mathbf{h})$
151	49	114	1.5035×10^{-1}
1,081	351	816	1.1229×10^{-2}
1,897	616	1,432	3.8875×10^{-3}
13,581	4,410	10,252	1.2459×10^{-4}

§4. $\mathscr{R}_s$ 点集的计算

现在将计算过程描述于下：命 p 为素数 $\geqslant 5$ 及 $s=\frac{p-1}{2}$，取 s 次分圆域 $\mathscr{R}_s=R\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)$，习知

$$\rho_l=\frac{\sin\frac{\pi}{p}g^{l+1}}{\sin\frac{\pi}{p}g^l},\quad 1\leqslant l\leqslant s-1 \tag{1}$$

为 $\mathscr{R}_s$ 的一组独立单位，此处 g 为 mod p 的原根.
命

$$\xi^{(i)}=\rho_1^{(i)x_1}\cdots\rho_{s-1}^{(i)x_{s-1}},\quad 2\leqslant i\leqslant s, \tag{2}$$

此处 $\rho_j^{(i)}$ 表示 ρ_j 的共轭元素. 解线性方程组

$$\log|\xi^{(2)}|=\cdots=\log|\xi^{(s)}| \tag{3}$$

可以确定唯一的一组比数

$$\frac{x_1}{x_{s-1}},\cdots,\frac{x_{s-2}}{x_{s-1}}. \tag{4}$$

命 l 为任一实数及 l_i 与 l_{s-1} 分别为 $\frac{lx_i}{l_{s-1}}(1\leqslant i\leqslant s-2)$ 与 l 经四舍五入后得来的整数，则

$$\eta(=\eta_l)=|\rho_1^{l_1}\cdots\rho_{s-1}^{l_{s-1}}| \tag{5}$$

为一个代数整数，从而

$$n(=n_l)=\eta+\eta^{(2)}+\cdots+\eta^{(s)} \tag{6}$$

为一个有理整数. 实际计算时可以取 $n\doteq\eta$，即 n 表示由 η 经四舍五入后得来的整数，取

$$h_1=1,\quad h_i\doteq n\left|\left\{2\cos\frac{2\pi i}{p}\right\}\right|,\quad 2\leqslant i\leqslant s, \tag{7}$$

于是得到一组 $\mathscr{R}_s$ 点集(见 §4.6).

当 $g=2$ 时，$\rho_l=2\cos\frac{2\pi}{p}2^{l-1}$，$1\leqslant l\leqslant s-1$.

例 1. 取 $\mathscr{R}_2=R\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)$，则取 $n=F_{m+1}$，$h_1=1$，$h_2=$

F_m，此处 $F_m = F_m^{(2)}$ 即 η 点集(见例3.1).

例 2. 取 $\mathscr{R}_3 = R\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)$ 及单位

$$\varepsilon_1 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -1.8019\cdots, \quad \varepsilon_2 = 2\cos\frac{2\pi}{7} = 1.2473\cdots,$$

$$\varepsilon_3 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -0.4447\cdots,$$

这三个单位中任意两个都构成独立单位组. 由方程

$$|\varepsilon_2^\alpha \varepsilon_3^\beta| = |\varepsilon_3^\alpha \varepsilon_1^\beta|$$

解得

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1.357\cdots \simeq \frac{4}{3},$$

此处"$\simeq$"表示差不多相等之意，于是得，例如

$$n = 418 \doteq \eta = \varepsilon_1^8 \varepsilon_2^6, \quad h_1 = 1,$$

$$h_2 = 335 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{6\pi}{7}\right|\right\},$$

$$h_3 = 103 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{2\pi}{7}\right|\right\}.$$

又经计算有下列结果

n	h_2	h_3	$W_2(n, \mathbf{h})$
20	17	6	2.66
83	66	20	5.52×10^{-1}
418	335	103	3.71×10^{-2}
1,692	1,357	418	4.88×10^{-3}

例 3. 取 $\mathscr{R}_5 = R\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right)$ 及单位

$$\varepsilon_1 = 2\cos\frac{10\pi}{11}, \quad \varepsilon_2 = 2\cos\frac{2\pi}{11}, \quad \varepsilon_3 = 2\cos\frac{8\pi}{11},$$

$$\varepsilon_4 = 2\cos\frac{4\pi}{11}, \quad \varepsilon_5 = 2\cos\frac{6\pi}{11}.$$

由方程组

$$|\varepsilon_2^\alpha\varepsilon_4^\beta\varepsilon_5^\gamma\varepsilon_3^\delta| = |\varepsilon_3^\alpha\varepsilon_5^\beta\varepsilon_2^\gamma\varepsilon_1^\delta| = |\varepsilon_4^\alpha\varepsilon_3^\beta\varepsilon_1^\gamma\varepsilon_5^\delta| = |\varepsilon_5^\alpha\varepsilon_1^\beta\varepsilon_4^\gamma\varepsilon_2^\delta|$$

解得

$$\frac{\alpha}{\delta} = 1.412\cdots \simeq \frac{7}{5}, \quad \frac{\beta}{\delta} = 1.584\cdots \simeq \frac{8}{5},$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = 0.944\cdots \simeq \frac{5}{5}$$

可得

$$n = 9,389 \doteq \eta = |\varepsilon_1^7\varepsilon_2^8\varepsilon_3^5\varepsilon_4^5|, \quad h_1 = 1,$$

$$h_2 = 8,628 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{10\pi}{11}\right|\right\},$$

$$h_3 = 6,408 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{2\pi}{11}\right|\right\},$$

$$h_4 = 2,908 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{8\pi}{11}\right|\right\},$$

$$h_5 = 7,800 \doteq n\left\{\left|2\cos\frac{4\pi}{11}\right|\right\},$$

经计算可得

$$W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 6.69 \times 10^{-2}.$$

附记.

1. 用分圆域方法时,当 s 维空间之 n, $\mathbf{h}(n)$ 算出后,去掉 $\mathbf{h}(n)$ 中的若干个分量后,得到的 s' 维矢量为 $\mathbf{h}^*(n)$, 于是得到 s' 维空间的一组数据 n, $\mathbf{h}^*(n)$, 当 s' 相比于 s 不太小时, 它们所对应的 s' 维的 $W_2(n, \mathbf{h}^*)$ 仍很精密. 例如当 $s = 9$ 时算出 $n = 462,891$, $h_1 = 1$, $h_2 = 450,265$, $h_3 = 412,730$, $h_4 = 351,310$, $h_5 = 267,681$, $h_6 = 164,124$, $h_7 = 43,464$, $h_8 = 371,882$, $h_9 = 227,266$, 去掉 h_8, h_9, 则得 7 维矢量 $\mathbf{h}_7^*$, 去掉 h_9, 则得 8 维矢量 $\mathbf{h}_8^*$, 经计算后分别得到 $W_2(n, \mathbf{h}_7^*) \leqslant 1.9397 \times 10^{-2}$ 与 $W_2(n, \mathbf{h}_8^*) \leqslant 1.6240 \times 10^{-1}$. 所以我们虽然只用了 $s = \frac{p-1}{2}$ 维的分圆域,

仍能得到全部维数所需的数据，因此这一方法对维数是没有限制的．

2. 我们暂不采用更广的分圆域，例如当 $s = \frac{\varphi(p^l)}{2}$，此处 $l > 1$，p 为素数，我们有分圆域 $\mathscr{R}_s = R\left(\cos\frac{2\pi}{p^l}\right)$，实际计算表明，这种分圆域得出的 n, $\mathbf{h}$ 所对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 偏大些，例如 $l = 3$, $p = 3$ 得一个 9 维分圆域，可得 $n = 1{,}132{,}282$ 及其对应的 $\mathbf{h}$，经计算有 $W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 8.4481$．又如取 $l = 2$，$p = 5$ 得一个 10 维分圆域，可得 $n = 1{,}206{,}594$ 及其对应的 $\mathbf{h}$，经计算有 $W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 3.6636$，都偏大了（请与附录"格点点集表"相比较）．

§5. 其他 $\mathscr{F}_s$ 点集示例

其他实代数数域 $\mathscr{F}_s$ 也可以用来定出格点集．现在举两个例子．

例 1. 取 $\mathscr{D}_4 = R(\sqrt{5}, \sqrt{2})$ 及

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \varepsilon_2 = 1 + \sqrt{2}, \varepsilon_3 = 3 + \sqrt{10},$$

由单位

$$\varepsilon_1^6 \varepsilon_2^1 \varepsilon_3^2$$

得出

$$n = 11{,}574, \ h_1 = 1, \ h_2 = 7{,}153, \ h_3 = 4{,}794, \ h_4 = 1{,}878,$$

经计算得

$$W_2(n, \mathbf{h}) = 8.81 \times 10^{-3}.$$

例 2. 取 $R(\omega)$，此处 $\omega = \sqrt[4]{5}$ 及

$$\varepsilon_1 = 2 + \omega^2, \quad \varepsilon_2 = 3 - 2\omega.$$

（见 Bernstein, L.[1]）．解方程

$$\log|2 + \omega^2|^{x_1}|3 - 2\omega|^{x_2} = \log|2 - \omega^2|^{x_1}|3 - 2\omega i|^{x_2}$$

得

$$\frac{x_1}{x_2} = 2.12003\cdots,$$

由单位

$$\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2$$

得出

$$n = 2{,}889,\quad h_1 = 1,\quad h_2 = 1{,}431,\quad h_3 = 862,\quad h_4 = 993,$$

经计算得

$$W_2(n, \mathbf{h}) = 2.8626 \times 10^{-2}.$$

又由单位

$$\varepsilon_1^6\varepsilon_2^3 \doteq 310{,}563$$

得出

$$n = 310{,}563,\quad h_1 = 1, h_2 = 153{,}837,\quad h_3 = 106{,}741,$$
$$h_4 = 310{,}563,$$

经计算得

$$W_2(n, \mathbf{h}) \leqslant 2.0948 \times 10^{-4}.$$

附记.

附带指出，Bernstein, L. [1]中还给出了 $R(\tau)$，此处 $\tau = \sqrt[4]{3}$ 的一组独立单位，但其中的 $1 + \tau - \tau^2$ 并非单位，这是由于

$$N(1 + \tau - \tau^2) = (1 - \sqrt{3} + \sqrt[4]{3})(1 - \sqrt{3} - \sqrt[4]{3})$$
$$\times (1 + \sqrt{3} + i\sqrt[4]{3})(1 + \sqrt{3} - i\sqrt[4]{3}) = -11.$$

§6. 完全佳格点集的计算

引入记号：$p_1, p_2, \cdots, p_t$ 表示各不相同的奇素数及 $\mathbf{z} = (1, z, \cdots, z^{s-1})$ 为整矢量及

$$H_1(z) = \frac{3^s}{p_1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p_1-1}{2}}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p_1}\right\}\right)^2\right),$$

$$H_2(z) = \frac{3^s}{p_1p_2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p_1p_2-1}{2}}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1 - 2\left\{\frac{k(p_2b_1^\nu + p_1z^\nu)}{p_1p_2}\right\}\right)^2\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$H_t(z) = \frac{3^s}{q}\left(1+2\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1-2\left\{\frac{k(q_1b_1^\nu+\cdots+q_{t-1}b_{t-1}^\nu+q_tz^\nu)}{q}\right\}\right)^2\right),$$

此处 $q = p_1 \cdots p_t$ 及 $q_i = \frac{q}{p_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$，又命 b_1 为当 $z = 1, \cdots, \frac{p_1 - 1}{2}$ 时，使 $H_1(z)$ 取极小值者，b_2 为当 $z = 1, \cdots, \frac{p_2 - 1}{2}$ 时，使 $H_2(z)$ 取极小者，如此等等．b_t 为当 $z = 1, \cdots, \frac{p_t - 1}{2}$ 时，使 $H_t(z)$ 取极小之整数．

引理1. 命 $\alpha > 1$，q 为正整数及 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_s)$ 为整矢量．若 $(a_i, q) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$，则

$$\sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 (\bmod q)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha} - \sum_{\substack{(\mathbf{a}, \mathbf{m}^{(0)}) \equiv 0 (\bmod q) \\ -\frac{q}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{q}{2}}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}^{(0)}\|^\alpha}$$

$$\leqslant s 2^\alpha (2\zeta(\alpha) + 1)^s q^{-\alpha}. \tag{1}$$

证．由于

$$\sum_{-\frac{q}{2} < m \leqslant \frac{q}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m + lq)^\alpha} \leqslant 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + 2\zeta(\alpha)$$

及当 $-\frac{q}{2} < m \leqslant \frac{q}{2}$ 时，

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m + lq)^\alpha} \leqslant 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\left(q\left(l - \frac{1}{2}\right)\right)^\alpha} \leqslant 2\zeta(\alpha) \left(\frac{2}{q}\right)^\alpha.$$

类似于引理 4.9.1 的证明可知

$$\sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 (\bmod q)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha} - \sum_{\substack{(\mathbf{a}, \mathbf{m})^{(0)} \equiv 0 (\bmod q) \\ -\frac{q}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{q}{2}}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\substack{(\mathbf{a}, \mathbf{m}^{(0)}) \equiv 0 (\bmod q) \\ -\frac{q}{2} < m_i^{(0)} \leqslant \frac{q}{2}}} \left(\sum_{l_\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m_\nu^{(0)} + l_\nu q)^\alpha} \right)$$

$$\times \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{s} \left(\sum_{l_\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m_\mu^{(0)} + l_\mu q)^\alpha} \right) \leqslant s 2^\alpha (2\zeta(\alpha) + 1)^s q^{-\alpha}.$$

引理证完.

引理 2. 命 $M \geqslant 1$，若同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \equiv 0 (\bmod n) \tag{2}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant M, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{3}$$

中无解，又若 r 为正整数，则

$$\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod n)\\ |m_i|\leqslant rn}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|} \leqslant c(s)M^{-1}(\log 3rn)^s. \tag{4}$$

证. 命 $T_M^l(l \geqslant 1)$ 表示同余式(2)在范围

$$\|\mathbf{m}\| < lM, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{5}$$

中的解数，则 $T_M^l \leqslant c(s)l(\log 3lM)^{s-1}$（见引理 3.4.3），所以

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod n)\\ |m_i|\leqslant rn}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|} &\leqslant \sum_{l=1}^{(rn)^s} \frac{(T_M^{l+1} - T_M^l)}{lM} \\
&= M^{-1}\sum_{l=1}^{(rn)^s} T_M^{l+1}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) + \frac{T_M^{(rn)^s+1}}{((rn)^s+1)M} \\
&\leqslant c(s)M^{-1}\sum_{l=1}^{(rn)^s} \frac{(\log 3lM)^{s-1}}{l} \\
&\quad + c(s)M^{-1}(\log 3rn)^{s-1} \\
&\leqslant c(s)M^{-1}(\log 3rn)^s.
\end{aligned}$$

引理证完.

定理 1. 假定当 $z = 1, \cdots, \frac{p_1 - 1}{2}$ 时，整数 b_1 使 $H_1(z)$ 取极小值，则 $\mathbf{b}_1 = (1, b_1 \cdots, b_1^{s-1})$ 为 mod p_1 之极值系数.

证. 由引理 1.1 可知

$$B_2(\{x\}) = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi imx}}{m^2},$$

所以

$$3(1 - 2\{x\})^2 = \frac{6}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi imx}}{m^2} + 1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi imx}}{\psi(m)}, \tag{6}$$

此处

$$\psi(m)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{6}m^2, & \text{当 } m\neq 0,\\ 1, & \text{当 } m=0.\end{cases} \tag{7}$$

由(6)可得

$$\begin{aligned}\left(1-2\left\{\frac{(p_1-k)z^\nu}{p_1}\right\}\right)^2&=\left(1-2\left\{\frac{-kz^\nu}{p_1}\right\}\right)^2\\&=\left(1-2\left\{\frac{kz^\nu}{p_1}\right\}\right)^2,\end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$\begin{aligned}H_1(z)&=\frac{3^s}{p_1}\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{p_1-1}{2}}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1-2\left\{\frac{kz^\nu}{p_1}\right\}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\sum_{k=1}^{\frac{p_1-1}{2}}\prod_{\nu=1}^{s-1}\left(1-2\left\{\frac{(p_1-k)z^\nu}{p_1}\right\}\right)^2\right)\\&=\frac{3^s}{p_1}\sum_{k=1}^{p_1}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1-2\left\{\frac{kz^\nu}{p_1}\right\}\right)^2\\&=\frac{1}{p_1}\sum_{k=1}^{p_1}\sum\frac{e^{\frac{2\pi i(\mathbf{z},\mathbf{m})k}{p_1}}}{\prod\limits_{\nu=1}^{s}\psi(m_\nu)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1(z)-1&=\sum_{(\mathbf{z},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}{}'\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{s}\psi(m_\nu)}\\&<\sum_{(\mathbf{z},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

由定理 7.6.2 的证明可知

$$\begin{aligned}H_1(b_1)-1&\leqslant\min_{1\leqslant z\leqslant p_1-1}\sum_{(\mathbf{z},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\\&\leqslant c(s)p_1^{-1}(\log p_1)^{2(s-1)},\end{aligned} \tag{10}$$

另一方面易得

$$H_1(b_1)-1\geqslant\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\sum_{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}. \tag{11}$$

由(10),(11)可知存在 $c(s)$ 使当

$$\|\mathbf{m}\|<c(s)p_1(\log p_1)^{-(s-1)},\quad \mathbf{m}\neq \mathbf{0} \tag{12}$$

时有

$$(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\not\equiv 0(\bmod p_1). \tag{13}$$

故由定理 3.5.1 可知点集

$$\left(\left\{\frac{k}{p_1}\right\},\left\{\frac{kb_1}{p_1}\right\},\cdots,\left\{\frac{kb_1^{s-1}}{p_1}\right\}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant p_1 \tag{14}$$

有偏差

$$\varphi(p_1)=c(s)p_1^{-1}(\log p_1)^{2s-1}, \tag{15}$$

即 $\mathbf{b}_1$ 为 $\bmod p_1$ 之极值系数(参看 § 4.6). 定理证完.

定理 2. 假定 b_1 之含义如定理 1 所示，若当 $z=1,\cdots,\frac{p_2-1}{2}$ 时，$z=b_2$ 为使 $H_2(z)$ 取极小之整数，则 $(p_1+p_2,\ p_1b_2+p_2b_1,\ \cdots,\ p_1b_2^{s-1}+p_2b_1^{s-1})$ 为 $\bmod p_1p_2$ 之极值系数.

证. 由(6)可得

$$H_2(z)=\frac{3^s}{p_1p_2}\sum_{k=1}^{p_1p_2}\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(1-2\left\{\frac{(p_1z^\nu+p_2b_1^\nu)k}{p_1p_2}\right\}\right)^2,$$

(参看(8)),所以

$$\begin{aligned}H_2(z)-1&=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=1}^{p_1p_2}\sum{}'\frac{e^{\frac{2\pi i(p_1(\mathbf{z},\mathbf{m})+p_2(\mathbf{b}_1,\mathbf{m}))k}{p_1p_2}}}{\prod_{\nu=1}^{s}\psi(m_\nu)}\\&=\sum_{p_1(\mathbf{z},\mathbf{m})+p_2(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1p_2)}{}'\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{s}\psi(m_\nu)}\\&=\sum_{\substack{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)\\(\mathbf{z},\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_2)}}{}'\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{s}\psi(m_\nu)}.\end{aligned} \tag{16}$$

将上面最后一个和分为$\sum_1$与$\sum_2$两部分，在 $\sum_1$ 中诸 m_ν 皆为 p_2 之倍数，其余均属于$\sum_2$. 由(10)可知

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{p_2(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}{}' \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{s} \psi(p_2 m_\nu)}$$

$$\leqslant p_2^{-2} \sum_{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{s} \psi(m_\nu)}$$

$$= p_2^{-2}(H_1(b_1) - 1) \leqslant c(s)(p_1 p_2)^{-2}(\log p_1 p_2)^{2(s-1)}, \tag{17}$$

又由引理 1 可知

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sum_{\substack{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)\\ (\mathbf{z},\ \mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_2)}}{}_2 \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}$$

$$\leqslant \sum_{-\frac{p_1p_2}{2}<m_i\leqslant\frac{p_1p_2}{2}}{}_2 \sum_{\substack{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)\\ (\mathbf{z},\ \mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_2)}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2} + c(s)(p_1p_2)^{-2}$$

$$\leqslant \Bigg(\sum_{-\frac{p_1p_2}{2}<m_i\leqslant\frac{p_1p_2}{2}}{}_2 \sum_{\substack{(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{m})\equiv 0\\ (\mathbf{z},\mathbf{m})\equiv 0}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|}\Bigg)^2 + c(s)(p_1p_2)^{-2},$$

所以由引理 4.3.1, 引理 2 及(12),(13)可知

$$\min_{1\leqslant z\leqslant\frac{p_2-1}{2}} \sum\nolimits_2 \leqslant \Bigg(\min_{1\leqslant z\leqslant\frac{p_2-1}{2}} \sum_{\frac{-p_1p_2}{2}<m_i\leqslant\frac{p_1p_2}{2}}{}_2 \sum_{\substack{(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)\\ (\mathbf{z},\ \mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_2)}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|}\Bigg)^2$$

$$+ c(s)(p_1p_2)^{-2}$$

$$\leqslant \Bigg(\frac{2}{p_2-1} \sum_{\substack{\frac{-p_1p_2}{2}<m_i\leqslant\frac{p_1p_2}{2}\\ (\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}}{}_2 \frac{1}{\|\mathbf{m}\|} \sum_{\substack{1\leqslant z\leqslant\frac{p_2-1}{2}\\ (\mathbf{z},\ \mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_2)}} 1\Bigg)^2$$

$$+ c(s)(p_1p_2)^{-2}$$

$$\leqslant \Bigg(\frac{2(s-1)}{p_2-1} \sum_{\substack{\frac{-p_1p_2}{2}<m_i\leqslant\frac{p_1p_2}{2}\\ (\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1)}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{m}\|}\Bigg)^2$$

$$+ c(s)(p_1p_2)^{-2}$$

$$\leqslant c(s)(p_1p_2)^{-2}(\log p_1p_2)^{4s-2}, \tag{18}$$

因此由(17),(18)可知

$$H_2(b_2) - 1 \leqslant \sum\nolimits_1 + \min_{1\leqslant z\leqslant\frac{p_2-1}{2}} \sum\nolimits_2 \leqslant c(s)(p_1p_2)^{-2}(\log p_1p_2)^{4s-2}. \tag{19}$$

另一方面

$$H_2(b_2) - 1 \geqslant \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \sum_{p_1(\mathbf{b}_2,\mathbf{m})+p_2(\mathbf{b}_1,\mathbf{m})\equiv 0(\bmod p_1p_2)}{}' \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{s} \psi(m_\nu)}, \quad (20)$$

由(19),(20)可知存在 $c(s)$, 使当

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant c(s)p_1p_2(\log p_1p_2)^{-(2s-1)}, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \quad (21)$$

时,同余式

$$p_1(\mathbf{b}_2, \mathbf{m}) + p_2(\mathbf{b}_1, \mathbf{m}) \equiv 0(\bmod p_1p_2) \quad (22)$$

无解. 故由定理 3.5.1 可知

$$(p_1 + p_2, p_1b_2 + p_2b_1, \cdots, p_1b_2^{s-1} + p_2b_1^{s-1})$$

为 mod p_1p_2 之极值系数. 定理证完.

依次类推,可以证明

定理 3. 命 $e_1 = q_1 + \cdots + q_t$, $e_2 = q_1b_1 + \cdots + q_tb_t$, $\cdots$, $e_s = q_1b_1^{s-1} + \cdots + q_tb_t^{s-1}$, 则 $(e_1, \cdots, e_s)$ 为 mod q 的极值系数.

在定理 3 中,首先命同余式

$$(q_1 + \cdots + q_t)x \equiv 1(\bmod q), \quad 1 \leqslant x \leqslant q$$

之解为 x. 又命

$$h_{\nu+1} \equiv (q_1b_1^\nu + \cdots + q_tb_t^\nu)x(\bmod q),$$
$$1 \leqslant h_{\nu+1} \leqslant q, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant s-1,$$

则 mod q 的极值系数即取形式

$$(1, h_2, \cdots, h_s).$$

附记.

Keast, P.[1,2] 指出,在实际应用定理 3 时,取

$$p_1 \simeq p_2 \simeq \cdots \simeq p_t$$

时所得的数值积分公式的误差常常最小. 如果已经有了 mod n 的极值系数,而 $p \nmid n$, 则可以由定理 2 求出 mod pn 的极值系数,这样将使我们可以利用已经具备的数据. 他还指出,当使用的素数个数较多时,数值积分的误差将相对增大,即对于差不多的点数 n, 当 n 为素数或两个素数乘积时,对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 比当 n 为多个素

数相乘时为小．但当 n 为 3 个或 4 个素数乘积时，误差的增大是不严重的．

§7．几点注记

1．由 §§2—4 的算例及附录“格点点集表”表明，近似计算多重积分时，用各种格点点集都比佳点点集精密，特别是完全佳格点集与 $\mathscr{R}_s$ 点集最精密，而且由格点点集构造的求积公式的形式特别简单，便于使用，所以我们建议尽量采用格点点集．当 s 很大，超过附表范围时，可以采用分组使用办法(见 §9)，而当 n 很大，超过附表范围时，则可以考虑使用佳点点集．

2．算出极值系数来所需的计算量是比较大的．由定理 6.1 可知算出 b_1 来所需的四则运算次数为

$$c(s)n^2, \tag{1}$$

此处 $n=p_1$ 为所用点数．

取 $p_2\simeq\sqrt{p_1}$，则由定理 6.2 可知定出 b_1,b_2 所需的初等运算次数为 $c(s)(p_1^2+p_1p_2^2)=c(s)(p_1p_2)^{\frac{4}{3}}$，即

$$c(s)n^{\frac{4}{3}}, \tag{2}$$

此处 $n=p_1p_2$ 为所用点数．

一般言之，取 $p_{\nu+1}\simeq\sqrt{p_\nu}\ (1\leqslant\nu\leqslant s-1)$，则由定理 6.3 可知，算出 $b_1,\cdots,b_t$ 所需的初等运算为

$$c(s)(p_1^2+p_1p_2^2+\cdots+p_1\cdots p_{t-1}p_t^2),$$

即

$$c(s)n^{\frac{2}{2-2^{-(t-1)}}}, \tag{3}$$

此处 $n=p_1p_2\cdots p_t$ 为所用点数．如果要使数值积分的误差 $W_2(n,\mathbf{h})$ 比较精密，按 Keast, P.[1,2] 的意见，则需取 $p_1\simeq p_2\simeq\cdots\simeq p_t$，则(3)式需换成

$$c(s)n^{1+t^{-1}}. \tag{4}$$

然而得到 η 点集与 $\mathscr{R}_s$ 点集所需的初等运算次数都仅仅是

$$O(\log n),\tag{5}$$

此处与"O"有关的常数仅依赖于 η 或 $\mathscr{R}_s$. 当然由算出的 η 点集或 $\mathscr{R}_s$ 点集再去计算其对应的 $W_2(n, \mathbf{a})$, 所需的四则运算是

$$c(s)n,\tag{6}$$

而用 §6 的方法,对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 是可以设法同时得到的.

Haber, S.[2] 在 UNIVAC 1108 上进行了计算后指出, 用定理 6.1 的方法算出一组 n, $\mathbf{h}(n)$ 需 Asn^2 秒, 此处 $A\simeq 10^{-5}$. 用这一方法, n 的阶可达 10^4, s 可达 10 至 20. 但当 s 达到 10 时, n 的阶就需 10^5 或更多, 从而计算又变得很冗长. 算出一组 $\mathscr{R}_s$ 点集仅需 As^3 秒, 此处 $A\simeq 10^{-3}$. 计算至少可达 $s=100$, 而 n 可以不加限制. 同时他亦指出,由分圆域方法得到的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 比 Коробов, Н. М. 方法偏大些.

Moon, Y. S.[1] 在 IBM $\frac{370}{165}$ 上进行的计算表达了类似的结论.

3. 就已经发表的 $s=3, 5, 6$ 维时, 完全佳格点集与 $\mathscr{R}_s$ 点集所对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 的比较,请参看 Maisonneuve, M.[1]与 Haber, S.[2]. 现在将张荣尚,徐广善与王元[1]算出的,当 $s=7,8,9$ 时,这两种方法得到的点数相近的数据进行比较 ($s=10$ 时, 未找到点数相近的数据, 故未作比较), 精度基本上是相当的. 下面各表中的完全佳格点集的各数据,请参看 Салтыков, А. И.[1]与 Maisonneuve, M.[1].

表 1 ($s=7$)

完全佳格点集		$\mathscr{R}_s$ 点集	
n	$W_2(n, \mathbf{h})$	n	$W_2(n, \mathbf{h})$
15,019	1.2	11,215	1.9416
71.053	2.1×10^{-1}	84,523	2.0407×10^{-1}

表 2 ($s=8$)

完全佳格点集		$\mathscr{R}_s$ 点集	
n	$W_2(n, \mathbf{h})$	n	$W_2(n, \mathbf{h})$
24,041	3.9	28,832	3.4501×10^{-1}
100,063	7.6×10^{-1}	84,523	9.8761×10^{-1}

表 3 ($s=9$)

完全佳格点集		$\mathscr{R}_s$ 点集	
n	$W_2(n, \mathbf{h})$	n	$W_2(n, \mathbf{h})$
46,213	9.5	42,570	1.0496×10
159,053	2.5	172,155	2.3708

4. $\mathscr{R}_s$ 点集比 η 点集所对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 精密，而且当维数愈高时愈显著．例如当 $s=9$ 时，由 $\mathscr{R}_s$ 点集得出

$$W_2(957,838,\mathbf{h})\leqslant 4.1494\times10^{-1},$$

而由 η 点集得出

$$W_2(1,035,269,\mathbf{h})\leqslant 4.6013\times10^{-1},$$

又当 $s=11$ 时，由 $\mathscr{R}_s$ 点集得出

$$W_2(7,494,007,\mathbf{h})\leqslant 6.3956\times10^{-1},$$

而由 η 点集得出

$$W_2(8,359,937,\mathbf{h})\leqslant 1.0401.$$

5. 据现有材料，尚未找到比实分圆域更有利于计算用的实域．

§8. 格点点集表

所谓"格点点集表"即含有 n, $\mathbf{h}(n)$ 及 $W_2(n, \mathbf{h})$ 等的格点点集表．这不仅对于实际计算多重积分或其他问题时是必不可少的，而且也是进行理论工作时的重要参考．最早的一张格点点集

表是 Салтыков, А. И.[1] 根据 Коробов, Н. М. 方法作出的. 由于这一方法计算量大(见 §§ 6—7), 所以只将范围限于 $3 \leqslant s \leqslant 10$, $100 \leqslant n \leqslant 155,093$. 他还估计了 $\sup_{f \in E_s^2(C)} |S(n, \mathbf{h}, f)|$ 的比 $W_2(n, \mathbf{h})$ 偏大些的上界估计. 不少著作中都抄录了这张表作为附录(见 Коробов, Н. М.[7], 华罗庚与王元[3], Stroud, A. H.[1]). 以后, Maisonneuve, M.[1] 对 Салтыков, А. И.[1] 提出的数据 n, $\mathbf{h}(n)$ 所对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$ 在 CDC 6400 上作了计算. 用比 § 6 更精密的方法, Maisonneuve, M.[1], Kedem, G. 与 Zaremba, S. K.[1]分别作了计算,但仅限于 $s = 3, 4$ 及 $n \leqslant 6,606$. Keast, P.[1,2] 用他推广的 Коробов 方法,算出 $s \leqslant 10$ 及 $s = 12, 16, 18, 20$ 的若干组数据. 此外, Conroy, H.[1] 亦给出了 $s \leqslant 12$ 时的几组数据. 最近, Cranley, R. 与 Parterson, T. N. L.[1] 指出, 现有的数据, 特别当 n 较大时, 还是很有限的, 最完善的表依然是 Салтыков, А. И.[1] 与 Conroy, H.[1] 的表. 进一步的数据有待于计算, 而这一工作,借助于分圆域方法是较易于完成的.

华罗庚与王元[4,5]首先给出了几组 $\mathscr{R}_s$ 点集, 其中有一组 $s = 11$, $n = 698,047$. 以后, Haber, S.[2] 与 Moon, Y. S.[1] 又分别在 UNIVAC1108 与 IBM $\frac{370}{165}$ 上进行了计算, 得到了若干组 $\mathscr{R}_s$ 点集,范围为 $s \leqslant 14$, $n \leqslant 10^6$. 张荣肖、徐广善与王元在"高维数值积分的数论方法"中系统地计算了 $\mathscr{R}_s$ 点集, 除对 $s \leqslant 10$ 时进行了补充外,还列出 $11 \leqslant s \leqslant 18$ 时的几张表.

本书搜集作为附录的"格点点集表", 表 1, 表 10—12 这 4 张表为 $\mathscr{R}_s$ 点集. 表 2—9 这 8 张表中加有"*"号之数据为 $\mathscr{R}_s$ 点集(其中表 3 中加"*"号之数据为 η 点集), 未加"*"号者为完全佳格点集.

附记.

由表中的数据可见, 当 s 稍大时, 即使 n 比较大, 其对应之 $W_2(n, \mathbf{h})$ 亦较大, 这说明被积函数的光滑性要求应随维数增高而加强,并建议我们去计算 $W_{2l}(n, \mathbf{h})$ $(l \geqslant 2)$.

§ 9. 应用示例

我们要求定积分

$$\int_{\mathscr{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{1}$$

此处 $\mathscr{D}$ 为任意边界逐段光滑的有界区域．当 $\mathscr{D}$ 为 G_s 时，我们可以用格点集或第四章中所介绍的其他点集上被积函数值所构成的单和来逼近(1)(见§5.4)．而当$\mathscr{D}$非 G_s 时，我们则建议如下的方法：我们不妨假定 $\mathscr{D}\subset G_s$；否则可以采用通常的换变数法．然后定义

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{当 } \mathbf{x}\in\mathscr{D}, \\ 0, & \text{当 } \mathbf{x}\bar{\in}\mathscr{D}, \end{cases} \tag{2}$$

则

$$\int_{\mathscr{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{G_s} F(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{3}$$

从而定积分(1)即化为 G_s 上 $F(\mathbf{x})$ 的积分了．

例 1. 命

$$I = 2^2\int_0^1\int_0^1 x_1x_2dx_1dx_2 = 1,$$

用例 3.1 中列举的格点集计算，所得的值记为 I_1，又命 I_2，I_3，I_4 分别表示被积函数经变换

$$x_i = y_i^2(1-y_i),$$
$$x_i = y_i^3(10-15y_i+6y_i^2),$$
$$x_i = y_i^4(35-84y_i+70y_i^2-20y_i^3),\quad i=1,2$$

周期化后，再进行计算所得的值(见§6.5)，则计算得表

表 1

n	I_1	I_2	I_3	I_4
13	9.2308×10^{-1}	1.0285	1.0022	9.9781×10^{-1}
21	9.4029×10^{-1}	1.0131	1.0023	1.0004
34	9.7059×10^{-1}	1.0060	1.0006	1.00002
55	9.7709×10^{-1}	1.0027	1.0001	1.000014

例 2. 命

$$J_1=\int_0^1\int_0^1\frac{x_1^2}{1+x_2^2}dx_1dx_2=2.61799\cdots\times10^{-1},$$

$$J_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1+3x_1x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2)e^{x_1x_2x_3}dx_1dx_2dx_3$$
$$=1.71828\cdots,$$

$$J_3=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1\exp(\sin x_1\sin x_2\sin x_3)dx_1dx_2dx_3$$
$$=8.08173\cdots,$$

$$J_4=\int_0^2\int_{x_1^2}^{2x_1}x_1x_2^2dx_1dx_2=6.4,$$

$$J_5=\int_0^1\int_{x_1}^{2x_1}\int_{x_1x_2}^{x_1^2x_2}x_1^3x_2^3x_3dx_1dx_2dx_3$$
$$=-4.33566\cdots\times10^{-2},$$

又命用例 4.2 中所列举的格点集计算上面的积分所得的值分别记为 J_1', J_2', J_3', J_4', J_5', 则得下表.

表 2

n	J_1'	J_2'	J_3'	J_4'	J_5'
20	3.5573×10^{-1}	1.4992	8.9476	8.0148	-6.7248×10^{-2}
83	2.9544×10^{-1}	1.6932	7.8366	6.9748	-5.2348×10^{-2}
418	2.6103×10^{-1}	1.7202	7.9947	6.3749	-4.2538×10^{-2}
1,692	2.6180×10^{-1}	1.7183	8.0844	6.3999	-4.3290×10^{-2}
3,802	2.6180×10^{-1}	1.7183	8.0817	6.4000	-4.3357×10^{-2}

例 3. 命

$$K=\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}\int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\frac{dx_1dx_2dx_3}{x_1^2+x_2^2+(x_3+0.5)^2}$$
$$=1.14602\cdots\times10,$$

现将格点求积公式(仍用例 4.2 之数据)与三维 Gauss 求积公式相比较,有下列表.

表 3

方法	n	结果	时间(Djs-6机)
Gauss 方法 Algorichm 32 CACM	2^3	1.2409×10	2.6秒
	4^3	1.1324×10	15秒
	8^3	1.1391×10	104秒
	16^3	1.1425×10	789秒
数论方法	20	1.3063×10	0.5秒
	83	1.0928×10	1秒
	418	1.1494×10	9秒
	1,692	1.1460×10	41秒

附记.

1. 计算前可以先将被积函数周期化后,再进行计算,这样可以提高计算的精密度. 但被积函数经周期化后,常常变得比原来复杂多了(见例1). 因此用同样多的点,所需的机器时间也相应增多了. 所以对被积函数是否要进行周期化及用什么方法来周期化,都需根据具体情况来作具体决定. 关于各种周期化方法的比较示例,本书就不列举了,可以参看 Maisoneuve, D.[1].

2. 当维数 s 较大,计算重积分时,还可以用分组计算的方法,例如 $s=s'+s''$,取 s' 与 s'' 维的格点集 n', $\mathbf{h}'$ 与 n'', $\mathbf{h}''$, 则

$$\frac{1}{n'n''}\sum_{k=1}^{n'}\sum_{l=1}^{n''}f\left(\frac{k\mathbf{h}'}{n'},\frac{l\mathbf{h}''}{n''}\right)$$

$$=\frac{1}{n'n''}\sum_{k=1}^{n'}\sum_{l=1}^{n''}\sum C(\mathbf{m})e^{2\pi i\left(\frac{(\mathbf{h}',\mathbf{m})k}{n'}+\frac{(\mathbf{h}'',\mathbf{m}'')l}{n''}\right)}$$

$$=\sum_{\substack{(\mathbf{h}',\mathbf{m}')\equiv 0(\mathrm{mod}\, n')\\(\mathbf{h}'',\mathbf{m}'')\equiv 0(\mathrm{mod}\, n'')}}C(\mathbf{m}),$$

此处 $\mathbf{m}=(\mathbf{m}',\mathbf{m}'')$, 其中 $\mathbf{m}'$ 与 $\mathbf{m}''$ 分别表示 s' 维与 s'' 维整矢量,从而

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_{G_s} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\frac{1}{n'n''}\sum_{k=1}^{n'}\sum_{l=1}^{n''} f\left(\frac{k\mathbf{h}'}{n'},\frac{l\mathbf{h}''}{n''}\right)\right|$$

$$\leqslant C\sum_{\substack{(\mathbf{h}',\mathbf{m}')\equiv 0(\bmod n')\\(\mathbf{h}'',\mathbf{m}'')\equiv 0(\bmod n'')}}{}^{'}\frac{1}{(\|\mathbf{m}'\|\cdot\|\mathbf{m}''\|)^\alpha},\tag{4}$$

我们用熟知的方法估计(4)之右端,它不超过

$$O((\min(n',n''))^{-\alpha}(\log n'n'')^{\alpha(s-1)}),\tag{5}$$

(见 § 7.6). 这一误差较大, 但对具体的 $n=n'n''$, 有时用分组计算更为有利. 依次类推, 我们也可以分为多组进行计算. (见 Zaremba, S. K.[4]).

注　释

§ 1. 定理 2 见 Maisonneuve, M.[1], Haber, S.[2] (参看张荣肖[1]).

§ 2. 参看华罗庚与王元 [6, 7]. 大部分数据是徐峰提供的.

§ 3. 参看华罗庚与王元 [6, 7].

§§ 4—5. 参看华罗庚与王元 [1, 4, 5, 6, 7], Haber, S.[2], Moon, Y. S.[1]. 另外张荣肖、徐广善与王元在"高维数值积分的数论方法"一文(将发表)中对有关问题也作过论述.

§ 6. 定理 1, 2, 见 Коробов, Н. М.[5,7]. 定理 3 见王元,朱尧辰与蒋运财[1], Keast, P.[1, 2].

§9. 关于积分区域非单位立方体的其他数值积分方法,请参看 Солодов, В. М.[2], 本节的算例是徐峰提供的.

第九章　插值与逼近

§1. 导引

命 $1 < n_1 < n_2 < \cdots$ 为一个正整数贯及

$$P_{n_l}(k) = (x_1^{(n_l)}(k), \cdots, x_s^{(n_l)}(k)), \quad 1 \leqslant k \leqslant n_l$$

表示 G_s 中的一个一致分布点集贯，对于 G_s 上定义的函数 $f(\mathbf{x})$，构造

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_l} f(P_{n_l}(k))\psi_{k,n_l}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

此处 $\psi_{k,n_l}(k)$ 为某已知函数.

若当 $n_l \to \infty$ 时，按某种度量，$P(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$，则称 $P(\mathbf{x})$ 为 $f(\mathbf{x})$ 的插值多项式.

通常用的度量有

1）考虑绝对误差，即

$$\sup_{\mathbf{x} \in G_s} |P(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|. \tag{2}$$

2）考虑均方差，即

$$\|P - f\|_{L_2} = \left(\int_{G_s} |P - f|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

假如 f 有绝对收敛的 Fourier 展开式

$$f(\mathbf{x}) = \sum C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{4}$$

此处

$$C(\mathbf{m}) = \int_{G_s} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \tag{5}$$

则由第七章讲的数值积分方法，可望用

$$\sum_{k=1}^{n_l} \alpha_{k,n_l} f(P_{n_l}(k)) e^{-2\pi i(\mathbf{m},P_{n_l}(k))} \tag{6}$$

来逼近 $C(\mathbf{m})$，因此可望用

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\|\mathbf{m}\|<N(n_l)} \sum_{k=1}^{n_l} \alpha_{k,n_l} f(P_{n_l}(k)) e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x}-P_{n_l}(k))} \tag{7}$$

来逼近 $f(\mathbf{x})$. 这是最简单的构造插值多项式的方法. 我们也可以用其它方法来构造插值多项式.

§2. 平均格网点集与插值公式

命 m 为整数 $\geqslant 2$, $n = m^s$, $\mathbf{l} = (l_1, \cdots, l_s)$ 及

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leqslant l_i < m \\ 1 \leqslant i \leqslant s}} f\left(\frac{\mathbf{l}}{m}\right) \sum_{\|\mathbf{k}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{k}, \mathbf{x}-\frac{\mathbf{l}}{m}\right)}. \tag{1}$$

定理 1. 假定 $\alpha > 1$ 及 $N = \left[\frac{m}{2}\right]$, 则

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \|P - f\|_{L_2} \leqslant C \cdot c(\alpha, s) n^{-\frac{2\alpha-1}{2s}} (\log n)^{\frac{s-1}{2}}. \tag{2}$$

证. 假定 $f \in E_s^\alpha(C)$ 及

$$f(\mathbf{x}) = \sum C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})},$$

则

$$\begin{aligned}
&C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leqslant l_i < m \\ 1 \leqslant i \leqslant s}} f\left(\frac{\mathbf{l}}{m}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m}, \frac{\mathbf{l}}{m}\right)} \\
&= C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leqslant l_i < m \\ 1 \leqslant i \leqslant s}} \sum C(\mathbf{k}) e^{2\pi i\left(\mathbf{k}-\mathbf{m}, \frac{\mathbf{l}}{m}\right)} \\
&= C(\mathbf{m}) - \sum_{\substack{m \mid (k_i - m_i) \\ 1 \leqslant i \leqslant s}} C(\mathbf{k}) \\
&= -\sum_{\substack{m \mid r_i \\ 1 \leqslant i \leqslant s}}{}' C(\mathbf{r} + \mathbf{m}).
\end{aligned} \tag{3}$$

由于当 t 为整数时

$$\int_0^1 e^{2\pi i t x} dx = \begin{cases} 1, & 当\ t = 0, \\ 0, & 当\ t \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

所以由(3),(4)得

$$\|P-f\|_{L_2}^2=\int_{G_s}|P-f|^2d\mathbf{x}$$

$$=\int_{G_s}(P-f)\overline{(P-f)}d\mathbf{x}$$

$$=\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\Big|\sum_{\substack{m|r_i\\1\leqslant i\leqslant s}}{}' C(\mathbf{r}+\mathbf{m})\Big|^2+\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N}|C(\mathbf{m})|^2. \quad (5)$$

于是

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\|P-f\|_{L_2}^2\leqslant C^2(\Sigma_1+\Sigma_2), \quad (6)$$

此处

$$\Sigma_1=\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\Big(\sum_{\substack{m|r_i\\1\leqslant i\leqslant s}}{}'\frac{1}{\|\mathbf{r}+\mathbf{m}\|^\alpha}\Big)^2 \quad (7)$$

与

$$\Sigma_2=\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{2\alpha}}. \quad (8)$$

显然由引理 7.6.1 可知

$$\Sigma_1\leqslant s\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\left(2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha\left(r-\frac{1}{2}\right)^\alpha}\right)^2$$

$$\times\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha\left(r-\frac{1}{2}\right)^s}\right)^{2(s-1)}$$

$$\leqslant c(\alpha,s)m^{-2\alpha}\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}1$$

$$\leqslant c(\alpha,s)m^{-2\alpha+1}(\log m)^{s-1}, \quad (9)$$

又由引理 7.6.1 可得

$$\Sigma_2\leqslant c(\alpha,s)m^{-2\alpha+1}(\log m)^{s-1}. \quad (10)$$

由(6),(9),(10)即得定理.

定理 2. 假定 $\alpha>1$, 则

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\|P-f\|_{L_2}\geqslant\begin{cases}C, & \text{当 } N>m,\\ \dfrac{C}{\sqrt{2\alpha-1}}n^{-\frac{2\alpha-1}{2s}}, & \text{当 } N\leqslant m.\end{cases} \quad (11)$$

证. 取

$$f(\mathbf{x})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx_1}}{\bar{k}^{\alpha}}, \tag{12}$$

则由(5)式可知

$$\|P-f\|_{L_2}^2=C^2\sum_{\bar{k}<N}\left(\sum_{m|r}{}'\frac{1}{(r+k)^{\alpha}}\right)^2+C^2\sum_{\bar{k}\geqslant N}\frac{1}{\bar{k}^{2\alpha}}, \tag{13}$$

故当 $N>m$ 时

$$\|P-f\|_{L_2}^2\geqslant C^2\sum_{\bar{k}<N}\frac{1}{\overline{(m+k)}^{2\alpha}}\geqslant C^2, \tag{14}$$

又当 $N\leqslant m$ 时

$$\begin{aligned}\|P-f\|_{L_2}^2&\geqslant C^2\sum_{k\geqslant N}\frac{1}{k^{2\alpha}}\geqslant C^2\int_N^{\infty}\frac{dt}{t^{2\alpha}}\\&=\frac{C^2}{2\alpha-1}N^{-2\alpha+1}\geqslant\frac{C^2}{2\alpha-1}m^{-2\alpha+1}.\end{aligned} \tag{15}$$

由(13),(14),(15)即得定理.

由定理 2 可知定理 1 的误差主阶 $n^{-\frac{2\alpha-1}{2s}}$ 是不能进一步改善的. 下面将研究由平均格网点集构造的任意插值多项式的逼近的误差的下界问题.

引理 1. 假定

$$\phi(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin 2\pi mx}{2m}\right)^{\alpha-1}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2m},\\[2ex] 0, & \text{当 } \dfrac{1}{2m}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{16}$$

及 $\phi(x+1)=\phi(x)$, 此处 α 为整数 >1 及 m 为整数 $\geqslant 1$, 则 $f(\mathbf{x})=\phi(x_1)\cdots\phi(x_s)\in E_s^{\alpha}(c(\alpha)^s)$.

证. 由于

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\left(\frac{e^{2\pi imx}-e^{-2\pi imx}}{4im}\right)^{\alpha-1}\\&=\frac{1}{(4im)^{\alpha-1}}\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}C_{\beta}^{\alpha-1}e^{2\pi im(2\beta-\alpha+1)x},\end{aligned}$$

所以有

$$\sup_{x\in G_1}|\psi^{(\alpha-1)}(x)|\leqslant\frac{|2\pi i m(\alpha-1)|^{\alpha-1}2^{\alpha-1}}{|4im|^{\alpha-1}}$$
$$=\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)^{\alpha-1},$$

及

$$\sup_{x\in G_1}|\psi^{(\alpha)}(x)|\leqslant 2m\pi^{\alpha}(\alpha-1)^{\alpha}.$$

又由于

$$\psi^{(\nu)}(0)=\psi^{(\nu)}\left(\frac{1}{2m}\right)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,\alpha-2,$$

所以当 $k\neq 0$ 时，

$$C(k)=\int_0^1\psi(x)e^{-2\pi i k x}dx$$
$$=\frac{1}{(2\pi i k)^{\alpha-1}}\int_0^{\frac{1}{2m}}\psi^{(\alpha-1)}(x)e^{-2\pi i k x}dx$$
$$=\frac{-1}{(2\pi i k)^{\alpha}}\psi^{(\alpha-1)}(x)e^{-2\pi i k x}\Big|_0^{\frac{1}{2m}}$$
$$+\frac{1}{(2\pi i k)^{\alpha}}\int_0^{\frac{1}{2m}}\psi^{(\alpha)}(x)e^{-2\pi i k x}dx$$
$$\leqslant c(\alpha)|k|^{-\alpha}.$$

故得引理.

定理 3. 假定 α 为整数 >1 及 $P(\mathbf{x})$ 为用平均格网点集 $\frac{\mathbf{l}}{m}$ $(0\leqslant l_i<m,\ 1\leqslant i\leqslant s)$ 定义的任意型如 (1.1) 的 f 的插值多项式，则

$$\sup_{f\in E_s^{\alpha}(C)}\sup_{x\in G_s}|f-P|\geqslant C\cdot c(\alpha,s)n^{-\frac{\alpha-1}{s}}.\tag{17}$$

证. 取

$$f(\mathbf{x})=C\cdot c(\alpha)^s\psi\left(x_1+\frac{1}{2m}\right),\tag{18}$$

此处 $\psi(x)$ 如 § 1 所示，则适当选取 $c(\alpha)$ 可以使 $f\in E_s^{\alpha}(C)$. 由于

$$f\left(\frac{\mathbf{l}}{m}\right)=\psi\left(\frac{l_1}{m}+\frac{1}{2m}\right)=0,\quad 0\leqslant l_i<m,\ 1\leqslant i\leqslant s,$$

所以 $P\left(\frac{1}{m}\right)=0$. 然而

$$f\left(1-\frac{1}{4m}, 0, \cdots, 0\right)=C\cdot c(\alpha)^s\psi\left(\frac{1}{4m}\right)$$

$$=C\cdot c(\alpha)^s m^{-\alpha+1}=C\cdot c(\alpha)^s n^{-\frac{\alpha-1}{s}}.$$

定理证完.

由定理 2,3 可见,当 s 稍大时,用平均格网点集构造的插值公式的误差是很大的. 我们将在以下几节利用格点点集来构造误差主阶与 s 无关的精密的插值公式.

§3. 若干引理

引理 1. 命 $\mathbf{l}=(l_1, \cdots, l_s)$ 为适合 $\|\mathbf{l}\|\geqslant 3^s$ 的整矢量及 N 适合 $1\leqslant N\leqslant\frac{\|\mathbf{l}\|}{3^s}$. 则

$$\sum_{\|\mathbf{m}\|\leqslant N}\frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^\alpha}<\begin{cases}s!c(\alpha, \varepsilon)^s N^{1+\varepsilon}\|\mathbf{l}\|^{-\alpha}, & \text{当 } 1\geqslant\alpha>0, \\ s!c(\alpha)^s N^\alpha\|\mathbf{l}\|^{-\alpha}, & \text{当 } \alpha>1.\end{cases} \tag{1}$$

证. 首先假定 $1\geqslant\alpha>0$. 当 $s=1$ 时,由于 $N\leqslant\frac{\bar{l}_1}{3}$, 所以

$$\sum_{\bar{m}_1\leqslant N}\frac{1}{(\overline{l_1+m_1})^\alpha}\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha\frac{3N}{\bar{l}_1^\alpha},$$

因此当 $s=1$ 时,引理成立. 现在假定 $k\geqslant 1$ 及引理对于 $s=1, 2, \cdots, k$ 时成立, 下面证明引理对于 $s=k+1$ 亦成立. 显然由 $\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant N\leqslant\frac{\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1}}{3^{k+1}}$ 可知至少存在一个 m_i 使 $m_i<\frac{\bar{l}_i}{2}$, 其中 $1\leqslant i\leqslant k+1$, 因此

$$\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant N}\frac{1}{((\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}}))^\alpha}\leqslant\sum\nolimits_1+\cdots+\sum\nolimits_{k+1}, \tag{2}$$

此处

$$\sum\nolimits_i=\sum_{\substack{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant N\\ \bar{m}_i<\frac{\bar{l}_i}{2}}}\frac{1}{((\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}}))^\alpha},$$

$$1\leqslant i\leqslant k+1. \tag{3}$$

1）假定$N \leqslant \frac{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}{3^k}$，则由归纳法假定可知

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{2^\alpha}{\bar{l}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_1\leqslant N}\ \sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{N}{\bar{m}_1}}\frac{1}{((\overline{l_2+m_2})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}}))^\alpha}$$

$$\leqslant \frac{k!c(\alpha,\varepsilon)^k N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}\sum_{\bar{m}_1\leqslant N}\frac{1}{\bar{m}_1^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{k!c(\alpha,\varepsilon)^{k+1}N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}. \quad (4)$$

2）假定$N > \frac{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}{3^k}$，则

$$\Sigma_1 \leqslant \sigma_1+\sigma_2, \quad (5)$$

此处

$$\sigma_1 = \frac{2^\alpha}{\bar{l}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_1\leqslant\frac{3^kN}{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}}\ \sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{N}{\bar{m}_1}}\frac{1}{((\overline{l_2+m_2})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}}))^\alpha} \quad (6)$$

与

$$\sigma_2 = \frac{2^\alpha}{\bar{l}_1^\alpha}\sum_{\frac{3^kN}{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}<\bar{m}_1\leqslant N}\ \sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{N}{\bar{m}_1}}\frac{1}{((\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}}))^\alpha}. \quad (7)$$

显然

$$\sigma_1 \leqslant \frac{2^\alpha}{\bar{l}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_1\leqslant\frac{3^kN}{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}}\ \sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{N}{\bar{m}_1}}\frac{(\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1})^{1-\alpha+\varepsilon}}{(\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1})^{1+\varepsilon}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,\varepsilon)^k N^{1-\alpha+\varepsilon}}{\bar{l}_1^\alpha}\sum_{\bar{m}_1\leqslant\frac{3^kN}{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}}\frac{\bar{m}_1^\alpha}{\bar{m}_1^{1+\varepsilon}}$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha,\varepsilon)^k N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}\sum\frac{1}{\bar{m}_1^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{c(\alpha,\varepsilon)^{k+1}N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}. \quad (8)$$

由归纳法假定可知

$$\sigma_2 \leqslant \frac{k!c(\alpha,\varepsilon)^k N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}\sum\frac{1}{\bar{m}_1^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{k!c(\alpha,\varepsilon)^{k+1}N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}. \quad (9)$$

3）由1)，2)可得

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{k!c(\alpha,\varepsilon)^{k+1}N^{1+\varepsilon}}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}, \quad (10)$$

由于诸 $\sum_i (2 \leqslant i \leqslant k+1)$ 亦适合上面的估计式，故由归纳法即得引理. $\alpha > 1$ 的情况可以类似地来证明. 引理证完.

引理 2. 假定 n 为整数 $\geqslant 2$ 及 $1 \geqslant \alpha > 0$，$M \geqslant 1$，$Q \geqslant 1$，若同余式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{s} a_k m_k \equiv 0 \pmod{n} \tag{11}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\| \leqslant M, \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \tag{12}$$

中无解，则

$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n} \\ \|\mathbf{m}\| \leqslant Q}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}} \leqslant c(\varepsilon)^s Q^{1-\alpha+\varepsilon} M^{-1}. \tag{13}$$

证. 由定理 7.5.1 可知

$$\sideset{}{'}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}} \leqslant c(\varepsilon)^s M^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned} \sideset{}{'}\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n} \\ \|\mathbf{m}\| \leqslant Q}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha}} &\leqslant Q^{1-\alpha+\varepsilon} \sideset{}{'}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n}} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}} \\ &\leqslant c(\varepsilon)^s Q^{1-\alpha+\varepsilon} M^{-1}. \end{aligned}$$

引理证完.

引理 3. 命 $n = p$ 为奇素数及 $M = (4\zeta(1+\varepsilon)+2)^{-s} p^{1-\varepsilon}$，则存在整矢量 $\mathbf{a} = (1, a, \cdots, a^{s-1})$ 使同余式(11)在范围(12)中无解.

证. 显然可以假定 $M \geqslant 1$，若 $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 及 $\|\mathbf{m}\| \leqslant M$，则习知同余式 (11) 在范围 $1 \leqslant a \leqslant p$ 中最多只有 $s-1$ 个解(见引理 4.3.1). 故同余式(11)在范围 $\|\mathbf{m}\| \leqslant M$，$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ 及 $1 \leqslant a \leqslant p$ 中之总解数不超过

$$\begin{aligned} \sideset{}{'}\sum_{\|\mathbf{m}\| \leqslant M} \sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{p} \\ 1 \leqslant a \leqslant p}} 1 &\leqslant (s-1) \sideset{}{'}\sum_{\|\mathbf{m}\| \leqslant M} \frac{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}} \\ &\leqslant (s-1)(2\zeta(1+\varepsilon)+1)^s M^{1+\varepsilon} < \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

因此存在整数 a 满足 $1 \leqslant a \leqslant p$, 使同余式 (11) 在范围(12)中无解, 引理证完.

§4. $E_s^\alpha(C)$ 的函数的插值公式

本节常假定 $\alpha > 1$, 引入记号

$$\Delta_1 = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\| < N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x} - \frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} - f \right\|_{L_2} \tag{1}$$

与

$$\Delta_2 = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \sup_{\mathbf{x} \in G_s} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\| < N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x} - \frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} - f \right|. \tag{2}$$

定理 1. 假定 $N = [M^{\frac{2\alpha}{4\alpha-1}}]$, 若同余式 (3.11) 在 (3.12) 中无解, 则

$$\Delta_1 \leqslant C \cdot s!^{\frac{1}{2}} c(\alpha, \varepsilon)^s M^{-\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon}. \tag{3}$$

证. 由 (2.4) 得

$$\Delta_1^2 \leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{4}$$

此处

$$\Sigma_1 = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\| < N} \left| C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m}, \frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right|^2 \tag{5}$$

及

$$\Sigma_2 = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\| \geqslant N} |C(\mathbf{m})|^2, \tag{6}$$

由引理 3.5.1 可知

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m}, \frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum C(\mathbf{l}) e^{\frac{2\pi i(\mathbf{l}-\mathbf{m}, \mathbf{a})k}{n}}$$

$$= \sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{l}-\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{n}} C(\mathbf{l}) = \sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \equiv 0 \pmod{n}} C(\mathbf{r} + \mathbf{m}),$$

$$\left| C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m}, \frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right|$$

$$\leqslant C \sum_{(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \equiv 0 \pmod{n}}{}' \frac{1}{\|\mathbf{r} + \mathbf{m}\|^\alpha}.$$

由于

$$\|\mathbf{r}\| \leqslant 2^s \|\mathbf{m}\| \|\mathbf{r}+\mathbf{m}\|,$$

所以由定理 7.5.1 与引理 3.1 $\left(不妨假定 N \leqslant \frac{M}{3^s}\right)$ 得

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\leqslant C^2 \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \left(\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r})\equiv 0 (\bmod n)}' \frac{1}{\|\mathbf{r}+\mathbf{m}\|^\alpha} \right)^2 \\
&= C^2 \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r})\equiv 0 (\bmod n)}' \frac{1}{\|\mathbf{r}+\mathbf{m}\|^\alpha} \\
&\quad \times \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r}')\equiv 0 (\bmod n)}' \frac{\|\mathbf{m}\|^\alpha}{\|\mathbf{r}'\|^\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{m}\| \|\mathbf{r}'+\mathbf{m}\|} \right)^\alpha \\
&\leqslant C^2 2^{\alpha s} N^\alpha \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r}')\equiv 0 (\bmod n)}' \frac{1}{\|\mathbf{r}'\|^\alpha} \\
&\quad \times \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r}')\equiv 0 (\bmod n)} \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \frac{1}{\|\mathbf{r}+\mathbf{m}\|^\alpha} \\
&\leqslant C^2 \cdot s! c(\alpha)^s N^{2\alpha} \left(\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{r})\equiv 0 (\bmod n)}' \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^\alpha} \right)^2 \\
&\leqslant C^2 s! c(\alpha, \varepsilon)^s N^{2\alpha} M^{-2\alpha+\varepsilon} \\
&= C^2 s! c(\alpha, \varepsilon)^s M^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{7}$$

又易知

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leqslant C^2 \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{2\alpha}} = C^2 \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} \frac{\|\mathbf{m}\|^{-2\alpha+1+\varepsilon}}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}} \\
&\leqslant C^2 N^{-2\alpha+1+\varepsilon} \sum \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}} = C^2 \cdot c(\varepsilon)^s N^{-2\alpha+1+\varepsilon} \\
&= C^2 \cdot c(\varepsilon)^s M^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon},
\end{aligned} \tag{8}$$

故由(4),(7),(8)即得定理.

定理 2. 假定 $N = [M^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}]$，若同余式(3.11)在(3.12)中无解，则

$$\Delta_2 \leqslant C \cdot s! c(\alpha, \varepsilon)^s M^{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1}+\varepsilon}. \tag{9}$$

证. 显然有

$$\Delta_2 \leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{10}$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \left| C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m},\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right| \tag{11}$$

与

$$\sum\nolimits_2 = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} |C(\mathbf{m})|. \tag{12}$$

类似于(7)与(8)可得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &\leqslant C\cdot s!c(\alpha,\varepsilon)^s N^\alpha M^{-\alpha+\varepsilon}\\ &= C\cdot s!c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1}+\varepsilon}\end{aligned} \tag{13}$$

与

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\leqslant C \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} \frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\alpha} \leqslant C\cdot c(\varepsilon)^s N^{-\alpha+1+\varepsilon}\\ &= C\cdot c(\varepsilon)^s M^{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1}+\varepsilon},\end{aligned} \tag{14}$$

由(10),(13)与(14)即得定理.

由定理 1 与引理 7.5.1 (用 § 4.6 的记号)可得:

定理 3. 假定 $s=\dfrac{p-1}{2}$, 取 $\mathbf{a}=(c_1,\cdots,c_s)$, 则得

$$\Delta_1 \leqslant C\cdot c(\mathscr{R}_{s,\alpha,\varepsilon}) n^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}\right)\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon}. \tag{15}$$

由定理 1 与引理 3.3 得

定理 4. 取 $n=p$, 则存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使

$$\Delta_1 \leqslant C\cdot s!^{\frac{1}{2}} c(\alpha,\varepsilon)^s p^{-\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon}. \tag{16}$$

§ 5. $Q_s^\alpha(C)$ 的函数的插值公式

引入记号

$$\mu(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2}, & 当\ \alpha>1,\\[2ex] \dfrac{2\alpha^2}{1+4\alpha-\alpha^2}, & 当\ 1\geqslant\alpha>0\end{cases} \tag{1}$$

及

$$\Delta = \sup_{f \in Q_s^{\alpha}(C)} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} - f \right\|_{L_2}. \quad (2)$$

定理 1. 假定 $N = [M^{\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}}]$，若同余式 (3.1) 在 (3.12) 中无解，则

$$\Delta \leqslant C \cdot s!^{\frac{1}{2}} c(\alpha, \varepsilon)^s M^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}. \quad (3)$$

证. 显然可以假定 $\varepsilon < \mu(\alpha)$，取

$$T = \begin{cases} [\log_2 M] + 1, & \text{当 } \alpha > 1, \\ [\log_2 M N^{-1+\frac{\alpha}{2}}] + 1, & \text{当 } 1 \geqslant \alpha > 0, \end{cases} \quad (4)$$

则由 Minkowski 不等式得

$$\Delta \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3, \quad (5)$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sup_{f \in Q_s^{\alpha}(C)} \left\| f(\mathbf{x}) - \sum_{t_0 \leqslant T}'' \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2}, \quad (6)$$

$$\sum\nolimits_2 = \sup_{f \in Q_s^{\alpha}(C)} \left\| \sum_{t_0 \leqslant T}'' \left(\varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right) \right\|_{L_2} \quad (7)$$

及

$$\sum\nolimits_3 = \sup_{f \in Q_s^{\alpha}(C)} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} - \sum_{t_0 \leqslant T}'' \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m}, \mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right\|_{L_2}. \quad (8)$$

1) 由 Minkowski 不等式得

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \sup_{f \in Q_s^{\alpha}(C)} \sum_{t_0 > T}'' \|\varphi_{\mathbf{t}}\|_{L_2} \leqslant C \sum_{t_0 > T}'' 2^{-(\alpha-\varepsilon)t_0 - \varepsilon t_0} \leqslant C \cdot c(\alpha, \varepsilon)^s 2^{-(\alpha-\varepsilon)T} \leqslant C \cdot c(\alpha, \varepsilon)^s M^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}. \quad (9)$$

2) 显然

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sigma_1 + \sigma_2, \quad (10)$$

此处

$$\sigma_1 = \sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)} \Big\| \sum_{t_0\leqslant T}'' \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \Big(C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m},\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \Big) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \Big\|_{L_2} \quad (11)$$

及

$$\sigma_2 = \sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)} \Big\| \sum_{t_0\leqslant T}'' \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \Big\|_{L_2}. \quad (12)$$

由于

$$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) e^{-2\pi i\left(\mathbf{m},\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} = -\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)}' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{l}+\mathbf{m})$$

及

$$\|\mathbf{l}\| \leqslant 2^s \|\mathbf{m}\| \cdot \|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|,$$

所以由定理 6.3.2 可知

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &\leqslant \sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)} \Big\| \sum_{t_0\leqslant T}'' \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)}' C_{\mathbf{t}}(\mathbf{l}+\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})} \Big\|_{L_2}^2 \\
&\leqslant \sup_{f\in Q_s^{\alpha}(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \Big(\sum_{t_0\leqslant T}'' \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)}' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{l}+\mathbf{m})| \Big)^2 \\
&\leqslant C^2 \cdot c(\alpha)^s \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \Big(\sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)\\ \|\mathbf{l}\|\leqslant 2^{s+T}N}}' \frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^{\alpha}} \Big)^2 \\
&\leqslant C^2 \cdot c(\alpha)^s N^{\alpha} \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)\\ \|\mathbf{l}\|\leqslant 2^{s+T}N}}' \frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^{\alpha}} \\
&\quad \times \sum_{\substack{(\mathbf{a},\mathbf{l}')\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)\\ \|\mathbf{l}'\|\leqslant 2^{s+T}N}}' \frac{1}{\|\mathbf{l}'\|^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

我们显然可以假定 $N \leqslant \frac{M}{3^s}$，故由定理 7.5.1，引理 3.1，3.2 得

$$\sigma_1^2 \leqslant \begin{cases} C^2 \cdot s!\, c(\alpha,\varepsilon)^s N^{2\alpha} M^{-2\alpha+\varepsilon}, & \text{当 } \alpha > 1, \\ C^2 \cdot s!\, c(\alpha,\varepsilon)^s N^{3-\alpha+\varepsilon} M^{-2} 2^{2T(1-\alpha)+T\varepsilon}, & \text{当 } 1 \geqslant \alpha > 0. \end{cases}$$

由 Schwarz 不等式得

$$
\begin{aligned}
\sigma_2^2 &\leqslant \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} \left(\sum_{t_0\leqslant T}'' |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|\right)^2 \\
&\leqslant \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} \sum_{t_0\leqslant T}'' 2^{-\frac{\varepsilon t_0}{2}} \sum_{t_0\leqslant T}'' 2^{\frac{\varepsilon t_0}{2}} |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2 \\
&\leqslant c(\varepsilon)^s \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0\leqslant T}'' \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} 2^{\frac{\varepsilon t_0}{2}} |C_{\mathbf{t}}(\mathbf{m})|^2 \\
&\leqslant c(\varepsilon)^s \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \sum_{t_0>\log_2 N}'' 2^{\frac{\varepsilon t_0}{2}} \|\varphi_{\mathbf{t}}\|_{L_2}^2 \\
&\leqslant C^2\cdot c(\varepsilon)^s \sum_{t_0\geqslant \log_2 N}'' 2^{-2\alpha t_0+\frac{\varepsilon t_0}{2}} \\
&\leqslant C^2\cdot c(\alpha,\varepsilon)^s N^{-2\alpha+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

所以由(10)可知

$$
\sum\nolimits_2 \leqslant C\cdot s!^{\frac{1}{2}} c(\alpha,\ \varepsilon)^s M^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}. \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ \sum\nolimits_3 &= \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \left\| \sum_{t_0>T}'' \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\mathbf{t}}\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} e^{2\pi i\left(\mathbf{m},\ \mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)} \right\|_{L_2} \\
&\leqslant \sum_{t_0>T}'' \sup_{f\in Q_s^\alpha(C)} \|\varphi_{\mathbf{t}}\| \left(\sum_{\|\mathbf{m}\|<N} 1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \sum_{t_0>T}'' 2^{-\alpha t_0} \left(\sum_{\|\mathbf{m}\|<N} \frac{N^{1+\varepsilon}}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\cdot c(\alpha,\ \varepsilon)^s N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} 2^{-\alpha T+\frac{\varepsilon T}{2}} \\
&\leqslant C\cdot c(\alpha,\ \varepsilon)^s M^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

由(5),(9),(13),(14)即得定理.

由定理 1 与引理 7.5.1（用 § 4.6 的记号）可得

定理 2. 假定 $s=\dfrac{p-1}{2}$, 取 $\mathbf{a}=(c_1,\ \cdots,\ c_s)$, 则得

$$
\Delta \leqslant C\cdot c(\mathscr{R}_s,\ \alpha,\ \varepsilon) n^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(s-1)}\right)\mu(\alpha)+\varepsilon}. \tag{15}
$$

由定理 1 与引理 3.3 可得

定理 3. 取 $n=p$, 则存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使

$$
\Delta \leqslant C\cdot s!^{\frac{1}{2}} c(\alpha,\ \varepsilon)^s p^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}. \tag{16}
$$

§6. Bernoulli 多项式与插值法

本节仍假定 $\alpha>1$. 我们将用 Bernoulli 多项式将 $E_s^\alpha(C)$ 的函数 f 表成定积分. 从而直接由数值积分的结果得出 f 的插值多项式来. 对于某些 α 值,将改进 §4 的结果.

引理 1. 若 $f_i\in E_s^\alpha(C_i)(i=1,2)$, 则 $f_1f_2\in E_s^\alpha(C_1C_2\cdot c(\alpha)^s)$.

证. 命 $C_i(\mathbf{m})$ 为 $f_i(i=1,2)$ 的 Fourier 系数及 $C(\mathbf{m})$ 为 $f=f_1f_2$ 的 Fourier 系数,则

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{k}} C_1(\mathbf{n})C_2(\mathbf{k})e^{2\pi i(\mathbf{n}+\mathbf{k},\,\mathbf{x})}\\
&= \sum_{\mathbf{m}}\left(\sum_{\mathbf{n}} C_1(\mathbf{n})C_2(\mathbf{m}-\mathbf{n})\right)e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}\\
&= \sum_{\mathbf{m}} C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})},
\end{aligned}\tag{1}$$

此处

$$C(\mathbf{m})=\sum_{\mathbf{n}} C_1(\mathbf{n})C_2(\mathbf{m}-\mathbf{n}).\tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\bar{n}\,\overline{(m-n)})^\alpha} &= \sum_{|n|\leqslant\frac{|m|}{2}}\frac{1}{(\bar{n}\,\overline{(m-n)})^\alpha}\\
&\quad+\sum_{|n|>\frac{|m|}{2}}\frac{1}{(\bar{n}\,\overline{(m-n)})^\alpha}\\
&\leqslant\frac{2^\alpha}{\bar{m}^\alpha}\left(\sum_{|n|\leqslant\frac{|m|}{2}}\frac{1}{\bar{n}^\alpha}+\sum_{|n|>\frac{|m|}{2}}\frac{1}{\overline{(m-n)}^\alpha}\right)\\
&\leqslant\frac{2^{\alpha+1}}{\bar{m}^\alpha}\sum\frac{1}{\bar{n}^\alpha}=c(\alpha)\bar{m}^{-\alpha},
\end{aligned}$$

所以由(2)得

$$\begin{aligned}
|C(\mathbf{m})| &\leqslant\left|\sum_{n} C_1(\mathbf{n})C_2(\mathbf{m}-\mathbf{n})\right|\\
&\leqslant C_1C_2\sum_{\mathbf{n}}\frac{1}{(\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{m}-\mathbf{n}\|)^\alpha}
\end{aligned}$$

$$= C_1C_2\prod_{i=1}^{s}\left(\sum_{n_j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\bar{n}_i(\overline{m_i-n_i}))^{\alpha}}\right)$$

$$= C_1C_2\cdot c(\alpha)^s\|\mathbf{m}\|^{-\alpha}.$$

引理证完.

引理 2. 假定 $f\in E_1^{\alpha}(C)$，且有 r 次连续微商，则当 $\nu=1,\cdots,r$ 时有

$$f(x)=\int_0^1\sum_{\tau=0}^{1}f^{(\nu\tau)}(y)\varphi_\nu^{\tau}(y-x)dy, \tag{3}$$

此处

$$\varphi_\nu(x)=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}B_\nu(\{x\}), \tag{4}$$

其中 $B_\nu(x)$ 为 ν 次 Bernoulli 多项式.

证. 由于

$$\int_0^1\sum_{\tau=0}^{1}f^{(\nu\tau)}(y)\varphi_\nu^{\tau}(y-x)dy$$

$$=\int_0^1 f(y)dy+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(y)B_\nu(\{y-x\})dy$$

$$=\int_0^1 f(y)dy+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y)B_\nu(y)dy, \tag{5}$$

所以引理归结为证明(5)式之右端等于 $f(x)$. 当 $\nu=1$ 时

$$\int_0^1 f'(x+y)B_1(y)dy=f(x+y)B_1(y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x+y)dy$$

$$=f(x)-\int_0^1 f(y)dy,$$

即(5)式之右端等于 $f(x)$. 现在假定 $\nu\geqslant 2$ 及命题对于小于 ν 的整数都成立,则由引理 6.5.1 可知

$$B_\nu(1)=B_\nu(0),\quad B_\nu'(y)=\nu B_{\nu-1}(y),$$

所以由分部积分得

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y)B_\nu(y)dy$$

$$=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}f^{(\nu-1)}(x+y)B_\nu(y)\Big|_0^1$$

$$-\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y)B'_\nu(y)dy$$

$$=\frac{(-1)^{\nu-2}}{(\nu-1)!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y)B_{\nu-1}(y)dy$$

$$=\cdots$$

$$=f(x)-\int_0^1 f(y)dy.$$

故由归纳法即得引理.

引理 3. 假定 $f(\mathbf{x})\in E_s^\alpha(C)$，且有连续偏微商 $f(\mathbf{x})^{(r_1,\cdots,r_s)}$ $(0\leqslant r_1,\cdots,r_s\leqslant r)$，则当 $\nu=1,\cdots,r$ 时有

$$f(\mathbf{x})=\int_{G_s}\sum_{\tau_1,\cdots,\tau_s=0}^{1} f(\mathbf{y})^{(\tau_1\nu,\cdots,\tau_s\nu)}\prod_{i=1}^{s}\varphi_\nu^{\tau_i}(y_i-x_i)d\mathbf{y}. \quad (6)$$

证. 当 $s=1$ 时，引理 3 即引理2. 现在假定 $s\geqslant 2$ 及引理对于小于 s 的整数都成立. 易知 $f\in E_{s-1}^\alpha(C\cdot c(\alpha))$，故由归纳法可知，当 $\nu=1,\cdots,r$ 时

$$f(\mathbf{x})=\int_{G_{s-1}}\sum_{\tau_1,\cdots,\tau_{s-1}=0}^{1} f(y_1,\cdots,y_{s-1},x_s)^{(\tau_1\nu,\cdots,\tau_{s-1}\nu,0)}$$

$$\times\prod_{i=1}^{s-1}\varphi_\nu^{\tau_\nu}(y_\nu-x_\nu)dy_1\cdots dy_{s-1}$$

由引理 2 可知

$$f(y_1,\cdots,y_{s-1},x_s)^{(\tau_1\nu,\cdots,\tau_{s-1}\nu,0)}$$

$$=\int_0^1\sum_{\tau_s=0}^{1} f(\mathbf{y})^{(\tau_1\nu,\cdots,\tau_s\nu)}\varphi_\nu^{\tau_s}(y_s-x_s)dy_s,$$

代入上式即得(6)式. 故由归纳法即得引理.

引入记号

$$\Delta=\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\sup_{\mathbf{x}\in G_s}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\tau_1,\cdots,\tau_s=0}^{1} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)^{(\tau_1 r,\cdots,\tau_s r)}\prod_{i=1}^{s}\varphi_r^{\tau_i}\left(\frac{a_i k}{n}-x_i\right)\right.$$

$$\left.-f\right|. \quad (7)$$

定理 1. 假定 $\alpha>3$，若同余式(3.11)在(3.12)中无解，则

$$\Delta\leqslant C\cdot c(\alpha,\varepsilon)^s M^{-r+\varepsilon}, \quad (8)$$

此处 $\gamma = \min(r, \alpha - r)$，其中 $r = \left[\dfrac{\alpha+1}{2}\right]$.

证. 因 $\alpha > 3$，所以

$$\alpha - r \geqslant \alpha - \frac{\alpha+1}{2} = \frac{\alpha-1}{2} > 1. \tag{9}$$

假定 $f \in E_s^\alpha(C)$，则

$$f(\mathbf{x})^{(\tau_1 r, \cdots, \tau_s r)} = (2\pi_i)^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)r} \sum \left(\prod_{i=1}^{s} m_i^{\tau_i r}\right) C(\mathbf{m}) e^{2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})},$$

此处 $\tau_i = 0$ 或 $1 (1 \leqslant i \leqslant s)$. 由于

$$\left|\left(\prod_{i=1}^{s} m_i^{\tau_i r}\right) C(\mathbf{m})\right| \leqslant C\|\mathbf{m}\|^{-\alpha} \prod_{i=1}^{s} |m_i|^{\tau_i r}$$
$$\leqslant C\|\mathbf{m}\|^{-\alpha+r},$$

即 $f(\mathbf{x})^{(\tau_1 r, \cdots, \tau_s r)} \in E_s^{\alpha-r}(C\cdot(2\pi)^{rs})(\alpha - r > 1)$，所以由引理 3 得

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\tau_1, \cdots, \tau_s = 0}^{1} \int_{G_s} f(\mathbf{y})^{(\tau_1 r, \cdots, \tau_s r)} \prod_{i=1}^{s} \varphi_r^{\tau_i}(y_i - x_i) d\mathbf{y}. \tag{10}$$

命 $C(k)$ 为 $B_r(\{x\})$ 的 Fourier 系数，则当 $t \leqslant r-2$ 时，由 $B_r^{(t)}(0) = B_r^{(t)}(1)$（见引理 6.5.2），所以当 $k \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} C(k) &= \int_0^1 B_r(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \frac{-1}{(2\pi i k)^r} B_r^{(r-1)}(x) e^{-2\pi i k x} \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi i k)^r} \int_0^1 B_r^{(r)}(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= c(r)|k|^{-r}, \end{aligned}$$

即 $B_r(\{x\}) \in E_1^r(c(r))$，因此固定 $\mathbf{x}$ 可知

$$\prod_{i=1}^{s} \varphi_r^{\tau_i}(y_i - x_i)$$
$$= \frac{(-1)^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)(r-1)}}{r!^{\tau_1+\cdots+\tau_s}} \prod_{i=1}^{s} B_r^{\tau_i}(\{y_i - x_i\}) \in E_s^r(c(r)^s),$$

故由引理 1 可知

$$f(\mathbf{y})^{(\tau_1 r, \cdots, \tau_s r)} \prod_{i=1}^{s} \varphi_r^{\tau_i}(y_i - x_i) \in E_s^{\gamma}(C \cdot c(\alpha)^s),$$

因此由(10)及定理 7.5.1 可知(8)式成立．定理证完．

特别当 $\alpha = 2k\ (k = 2, 3, \cdots)$ 时，则 $r = \frac{\alpha}{2}$，所以 $\gamma = \frac{\alpha}{2}$，因此定理 1 比定理 4.1 与 4.2 强些．

在定理 1 的假定下，由定理 1 与引理 7.5.1（用 § 4.6 的记号）可得

定理 2. 假定 $s = \frac{p-1}{2}$，取 $\mathbf{a} = (c_1, \cdots, c_s)$，则

$$\Delta \leqslant C \cdot c(\mathscr{R}_s, \alpha, \varepsilon) n^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(s-1)}\right)\gamma + \varepsilon}. \tag{11}$$

由定理 1 与引理 3.3 可得

定理 3. 若 $n = p$，则存在整矢量 $\mathbf{a}(=\mathbf{a}(p))$ 使

$$\Delta \leqslant C \cdot c(\alpha, \varepsilon)^s p^{-\gamma+\varepsilon}. \tag{12}$$

§ 7. 插值公式的下界估计

引理 1. 假定 ξ 为实数及 $\frac{p_k}{q_k}\ (k = 0, 1, \cdots)$ 为 ξ 的渐近分数，则

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - \xi\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}. \tag{1}$$

证明见华罗庚[1]第十章．

定理 1. 命 n 为整数 $\geqslant 2$，则对于任何满足 $n > N \geqslant 1$ 之整数 N 及任何整矢量 $\mathbf{a}$ 皆有

$$\Delta = \sup_{f \in H_s^{\alpha}(C)} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) \sum_{\|\mathbf{m}\| < N} e^{-2\pi i\left(\mathbf{m}, \frac{k\mathbf{a}}{n} - \mathbf{x}\right)} - f \right\|_{L_2}$$

$$\geqslant \frac{C}{2 \cdot (2\pi)^{2\alpha}} n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

证．我们显然可以假定 $N > 1$，否则取 $f(\mathbf{x}) = C$，则得 $\Delta \geqslant C$，定理即成立．又显然可以假定 $(a_1, \cdots, a_s, n) = 1$，从而不妨取 $a_1 = -1$，命 $\frac{p_t}{q_t}$ 表示 $\frac{p_h}{q_h} = \frac{a_2}{n}$ 的 t 次渐近分数，假定 N 满足

$$1 = q_0 < \cdots < q_k \leqslant N < q_{k+1} < \cdots < q_h \leqslant n, \qquad (3)$$

命

$$K = a_2 q_k - n p_k, \qquad (4)$$

则由引理 1 可知

$$|K| \leqslant \frac{n}{q_{k+1}} < \frac{n}{N}. \qquad (5)$$

取

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C}{4(2\pi)^{2\alpha}}\left(\frac{e^{2\pi i(Kx_1+x_2)}}{\bar{K}^\alpha} + \frac{e^{-2\pi i(Kx_1+x_2)}}{\bar{K}^\alpha} + \frac{e^{2\pi i N x_1}}{N^\alpha} + \frac{e^{-2\pi i N x_1}}{N^\alpha}\right), \qquad (6)$$

则得

$$\Delta^2 \geqslant \sum_{\bar{m}_1\bar{m}_2<N}\left|\sum_{l_1\equiv a_2 l_2 (\mathrm{mod}\, n)}{}' C(l_1+m_1, l_2+m_2, 0, \cdots, 0)\right|^2 + 2\frac{C^2}{16(2\pi)^{4\alpha}}N^{-2\alpha} \geqslant \sum_{\bar{m}_1\bar{m}_2<N}(C(K+m_1, q_k+m_2, 0, \cdots, 0) + C(-K+m_1, -q_k+m_2, 0, \cdots, 0))^2 + \frac{C^2}{8(2\pi)^{4\alpha}}N^{-2\alpha} \geqslant C(K, 1, 0, \cdots, 0)^2 + C(-K, -1, 0, \cdots, 0)^2 + \frac{C^2}{8(2\pi)^{4\alpha}}N^{-2\alpha}$$

$$\geqslant \frac{C^2}{8(2\pi)^{4\alpha}}(n^{-2\alpha}N^{2\alpha} + N^{-2\alpha}) \geqslant \frac{C^2}{4(2\pi)^{4\alpha}}n^{-\alpha}.$$

定理证完.

定理 2. 命 n 为整数 $\geqslant 2$,则对于任何已知函数 $\psi_{n,k}(\mathbf{x})(1 \leqslant k \leqslant n)$ 及任意整矢量 $\mathbf{a}$ 皆有

$$\sup_{f\in H_s^\alpha(C)}\sup_{\mathbf{x}\in G_s}\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\psi_{n,k}(\mathbf{x}) - f\right| \geqslant \frac{C}{(2\pi)^\alpha}n^{-\frac{\alpha}{2}}. \qquad (7)$$

证明定理 2 之前先证明下面的引理.

引理 2. 同余式

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n) \qquad (8)$$

有解满足

$$|n_1| \leqslant \sqrt{n}, \quad |n_2| \leqslant \sqrt{n}, \quad (n_1, n_2) \neq (0, 0). \tag{9}$$

证. 由于

$$([\sqrt{n}]+1)([\sqrt{n}]+1) > n,$$

所以当 $x_1, x_2 = 0, \cdots, [\sqrt{n}]$时,数对 (x_1, x_2) 的个数多于 n,因此有不同的数对 (x_1', x_2') 与 (x_1'', x_2'') 适合于

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' \equiv a_1 x_1'' + a_2 x_2'' \pmod n.$$

取 $n_1 = x_1' - x_1''$ 与 $n_2 = x_2' - x_2''$, 则 n_1, n_2 显然适合(8)与(9). 引理证完.

定理 2 的证明. 由引理 2, 取 n_1, n_2 满足(8), (9)且不妨假定 $n_2 \neq 0$, 则对于任何整数 k 皆有

$$a_1 n_1 k \equiv -a_2 n_2 k \pmod n. \tag{10}$$

取 $H_s^\alpha(C)$ 的函数

$$f(\mathbf{x}) = C\,\frac{e^{2\pi i n_1 x_1} - e^{-2\pi i n_2 x_2}}{2(2\pi)^\alpha N^\alpha}, \tag{11}$$

此处 $N = \max(|n_1|, |n_2|)$, 则当 $k = 1, \cdots, n$ 时,由(10)得

$$f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right) = C\,\frac{e^{\frac{2\pi i a_1 n_1 k}{n}} - e^{\frac{-2\pi i a_2 n_2 k}{n}}}{2(2\pi)^\alpha N^\alpha} = 0. \tag{12}$$

取 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2|n_2|}$, 则由(11)得

$$f\left(0, \frac{1}{2|n_2|}, 0, \cdots, 0\right) = \frac{C}{(2\pi)^\alpha} N^{-\alpha} \geqslant \frac{C}{(2\pi)^\alpha} n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

由(12),(13)即得定理.

注　　释

§ 2. 定理 3 见 Коробов, Н. М. [7].

§ 3. 引理 1 见王元 [1].

§ 4. 形为定理 1 的插值公式最早是 Рябенький, В. С.[1] 与 Смоляк, С. А.[1] 提出的. 他们的公式是就 mod p 的极值系数而言的,误差的主阶为 $O(p^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}+\varepsilon})$, 定理 4 是他们结果的改进（见

王元[1,2]).

§5. 定理 1 见华罗庚与王元[6, 7].

§6. 定理 1 见 Коробов, Н. М. [6, 7].

§7. 定理 1 见华罗庚与王元 [7]，定理 2 见 Коробов, Н. М. [7].

第 十 章

积分方程与微分方程的近似解法

§1. 若干引理

引理 1. 若 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\alpha_{ij}x_ix_j(\alpha_{ij}=\alpha_{ji})$ 为半定正二次型，则

$$0\leqslant\det(\alpha_{ij})\leqslant\prod_{i=1}^{s}\alpha_{ii}. \tag{1}$$

证. 用三角方阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \cdots\cdots & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \cdots & 1 & \end{pmatrix}$$

将 (α_{ij}) 化为对角形

$$(\alpha_{ij})=\Lambda(\gamma_{ij}\delta_{ij})\Lambda',\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant s,$$

此处 $\gamma_{ii}\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant s)$（参看华罗庚[1]，第十四章），所以

$$\det(\alpha_{ij})=\prod_{i=1}^{s}\gamma_{ii}, \tag{2}$$

$$\alpha_{ii}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\lambda_{ij}\gamma_{jk}\delta_{jk}\lambda_{ik}=\gamma_{ii}+\sum_{j<i}\lambda_{ij}^2\gamma_{jj}\geqslant\gamma_{ii}. \tag{3}$$

由(2)，(3)即得引理.

由引理 1 易得出 Hadamard 不等式.

引理 2. 命 $\beta_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant s)$ 为实数，则

$$|\det(\beta_{ij})|\leqslant\prod_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

证. 命

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{s}\beta_{ik}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_{ik}\beta_{jk}\right)x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\alpha_{ij}x_ix_j,$$

则得

$$\det(\alpha_{ij})=(\det(\beta_{ij}))^2,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant s, \tag{5}$$

$$\alpha_{ii}=\sum_{k=1}^{s}\beta_{ik}^2,\quad 1\leqslant i\leqslant s, \tag{6}$$

故由引理 1 即得引理 2.

引理 3. 命 $a_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant s)$ 为任意实数及 $\tilde{A}_s(k)=\det(a'_{ij})$，此处 $0\leqslant k\leqslant s$ 及

$$a'_{ij}=\begin{cases}1+a_{ii}, & 当\ i=j,\ 1\leqslant i\leqslant k,\\ a_{ij}, & 其它情形.\end{cases}$$

又命 $A_s(k)$ 表示在条件 $|a_{ij}|\leqslant\frac{\gamma}{s}$ 之下，$|\tilde{A}_s(k)|$ 的确上界，此处 γ 为常数，则存在常数 $\gamma_1,\ \gamma_2$ 使

$$A_s(s-1)\leqslant\frac{\gamma_1}{s},\quad A_s(s)\leqslant\gamma_2. \tag{7}$$

证. 将 $\tilde{A}_s(k)$ 表为两个行列式之和，第一个行列式的第一行为 $(1,0,\cdots,0)$，第二个行列式的第一行为 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$. 这两个行列式的其余元素皆与 $\tilde{A}_s(k)$ 相同，则得

$$A_s(k)\leqslant A_{s-1}(k-1)+A_s(k-1).$$

若 $k\geqslant 2$，则关于 $A_{s-1}(k-1)$ 与 $A_s(k-1)$ 再用上面的不等式，故得

$$A_s(k)\leqslant A_{s-2}(k-2)+A_{s-1}(k-2)$$
$$+A_{s-1}(k-2)+A_s(k-2).$$

将这一手续继续 $k-1$ 次，则得

$$A_s(k)\leqslant A_{s-k}(0)+C_1^kA_{s-k+1}(0)+\cdots+A_s(0),$$

特别取 $k=s-1$，则得

$$A_s(s-1) \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} C_{\nu-1}^{s-1} A_\nu(0).$$

由于 $|a_{ij}| \leqslant \frac{\gamma}{s}$, 所以由引理 2 可知

$$A_\nu(0) \leqslant \nu^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\gamma}{s}\right)^\nu,$$

从而

$$A_s(s-1) \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} C_{\nu-1}^{s-1} \nu^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\gamma}{s}\right)^\nu \leqslant \frac{1}{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma^\nu \nu^{\frac{\nu}{2}}}{(\nu-1)!} = \frac{\gamma_1}{s}.$$

又由引理 2 可得

$$|A_s(s)| \leqslant ((|1+a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1s}|^2) \cdots (|a_{s1}|^2 + \cdots$$

$$+ |1+a_{ss}|^2))^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\left(1+\frac{\gamma}{s}\right)^2 + (s-1)\frac{\gamma^2}{s^2}\right)^{\frac{s}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{2\gamma+\gamma^2}{s}\right)^{\frac{s}{2}} \leqslant e^{\gamma+\frac{\gamma^2}{2}} = \gamma_2.$$

引理证完.

为简单计,我们用大写拉丁字母表示 s 维矢量.

引理 4. 假定 $F(Q_1, \cdots, Q_r) \in H_{rs}^\alpha(C)$ $(\alpha > 0)$, 若点集 M_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使求积公式

$$\int_{G_{rs}} F(Q_1, \cdots, Q_r) dQ_1 \cdots dQ_r$$

$$= \frac{1}{n^r} \sum_{k_1, \cdots, k_r = 1}^{n} F(M_{k_1}, \cdots, M_{k_r}) + O(\varepsilon(n)) \quad (8)$$

对于 $r=1$ 成立, 此处 $\varepsilon(n) = o(1)$ (当 $n \to \infty$), 而与"O"有关的常数仅依赖于 C, α, r, s, 则这一公式对于 $r > 1$ 亦成立.

证. 用归纳法. 由引理的假定已知引理对于 $r=1$ 成立,现在假定 $r \geqslant 2$ 及 (8) 对于小于 r 的整数成立. 由于固定 Q_r, $F(Q_1, \cdots, Q_r) \in H_{(r-1)s}^\alpha(C)$, 而固定 $Q_1, \cdots, Q_{r-1}$ 时, $F(Q_1, \cdots, Q_r) \in H_s^\alpha(C)$, 所以

$$\int_{G_{rs}} F(Q_1, \cdots, Q_r) dQ_1 \cdots dQ_r$$

$$= \int_{G_s} dQ_r \int_{G_{(r-1)s}} F(Q_1, \cdots, Q_{r-1}, Q_r) dQ_1 \cdots dQ_{r-1}$$

$$= \frac{1}{n^{r-1}} \sum_{k_1, \cdots, k_{r-1}=1}^{n} \int_{G_s} F(M_{k_1}, \cdots, M_{k_{r-1}}, Q_r) dQ_r + O(\varepsilon(n))$$

$$= \frac{1}{n^r} \sum_{k_1, \cdots, k_r=1}^{n} F(M_{k_1}, \cdots, M_{k_r}) + O(\varepsilon(n)).$$

故由归纳法即得引理.

§ 2. 第二类 Fredholm 型积分方程的渐近解法

本节将研究第二类 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q)\varphi(Q) dQ + f(P) \tag{1}$$

的渐近解法问题,此处 $f \in H_s^\alpha(C)$ 及 $K \in H_{2s}^\alpha(C)$ 为预先给的函数.

命

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \int_{G_{\nu s}} K\begin{pmatrix} P_1, & \cdots, & P_\nu \\ P_1, & \cdots, & P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \cdots dP_\nu \tag{2}$$

表示方程(1)的 Fredholm 核,此处

$$K\begin{pmatrix} P_1, & \cdots, & P_\nu \\ Q_1, & \cdots, & Q_\nu \end{pmatrix} = \det(K(P_i, Q_j)), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant \nu. \tag{3}$$

又命

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\delta_{ij} - \frac{\lambda}{n} K(M_i, M_j)\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{4}$$

本节常假定

$$D(\lambda) \neq 0. \tag{5}$$

定理 1. 假定点集 $M_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 使求和公式

$$\sup_{f \in H_s^\alpha(C)} \left| \int_{G_s} F(P) dP - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(M_k) \right| \leqslant C \cdot c(\alpha, s) \varepsilon(n) \tag{6}$$

成立,此处 $\varepsilon(n) = o(1)$ (当 $n \to \infty$). 又假定 $\tilde{\varphi}(M_k) (1 \leqslant k \leqslant n)$ 表示线性方程组

$$\tilde{\varphi}(M_j) = \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^{n} K(M_j, M_k) \tilde{\varphi}(M_k) + f(M_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{7}$$

的解，则方程(1)的解可以写为

$$\varphi(P)=f(P)+\frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n}K(P,M_k)\bar{\varphi}(M_k)+O(\varepsilon(n)),\qquad(8)$$

此处与"O"有关的常数仅依赖于 λ, K 与 f.

证明定理 1 之前，先证明下列诸引理.

引理 1. 命

$$D_r(\lambda)=1+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\lambda^\nu\int_{G_{\nu s}}K\begin{pmatrix}P_1, & \cdots, & P_\nu\\ P_1, & \cdots, & P_\nu\end{pmatrix}dP_1\cdots dP_\nu,\ (9)$$

则当 r 充分大时有

$$|D_r(\lambda)-D(\lambda)|\leqslant\frac{1}{2^r}.\qquad(10)$$

证. 由引理 1.2 可知

$$\left|K\begin{pmatrix}P_1, & \cdots, & P_\nu\\ P_1, & \cdots, & P_\nu\end{pmatrix}\right|\leqslant\nu^{\frac{\nu}{2}}C^\nu.$$

取 r 充分大满足

$$r\geqslant(2e|\lambda|C)^2\text{ 及 }\frac{3}{2^r}\leqslant\frac{1}{2}|D(\lambda)|,\qquad(11)$$

则

$$|D(\lambda)-D_r(\lambda)|=\left|\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\lambda^\nu\int_{G_{\nu s}}K\begin{pmatrix}P_1, & \cdots, & P_\nu\\ P_1, & \cdots, & P_\nu\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times dP_1\cdots dP_\nu\right|\leqslant\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{(|\lambda|C)^\nu\nu^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!}.$$

由于 $r!>r^re^{-r}$ 及当 $\nu\geqslant r+1$ 时

$$\frac{\nu!(|\lambda|C)^{\nu+1}(\nu+1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{(\nu+1)!(|\lambda|C)^\nu\nu^{\frac{\nu}{2}}}=\frac{|\lambda|C}{\sqrt{\nu+1}}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}}$$

$$\leqslant\frac{|\lambda|C\sqrt{e}}{\sqrt{r+2}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{e}}<\frac{1}{2},$$

所以

$$|D(\lambda)-D_r(\lambda)|\leqslant\frac{(|\lambda|C)^{r+1}(r+1)^{\frac{r+1}{2}}}{(r+1)!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}$$

$$\leqslant \frac{2(e|\lambda|C)^{r+1}}{(r+1)^{\frac{r+1}{2}}} \leqslant \frac{1}{2^r}.$$

引理证完.

引理 2. 存在常数 $n_0 = n_0(\lambda, K, f)$, 使当 $n > n_0$ 时有

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|D(\lambda)|. \qquad (12)$$

证. 命

$$\Delta_r(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1,\cdots,k_\nu=1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

取 $n > r$, 则如引理 1 的证明可得

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_r(\lambda)| \leqslant \Bigg| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \frac{1}{n^\nu}$$

$$\times \sum_{k_1,\cdots,k_\nu=1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \cdots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \cdots, M_{k_\nu} \end{pmatrix} \Bigg| \leqslant \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{(|\lambda|C)^\nu \nu^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!} \leqslant \frac{1}{2^r}. \qquad (14)$$

下面估计 $D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda)$. 由定理的假定可知求积公式

$$\int_{G_{\nu s}} K\begin{pmatrix} P_1, & \cdots, & P_\nu \\ P_1, & \cdots, & P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \cdots dP_\nu$$

$$= \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1,\cdots,k_\nu=1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \end{pmatrix} + O(\varepsilon(n)) \qquad (15)$$

当 $\nu = 1$ 时成立. 由于当 $K(P, Q) \in H^\alpha_{2s}(C)$ 时, $K\begin{pmatrix} P_1, & \cdots, & P_\nu \\ P_1, & \cdots, & P_\nu \end{pmatrix} \in H^\alpha_{\nu s}(C^\nu \cdot c(\nu, \alpha, s))$, 所以由引理 1.4 可知 (15) 式对于任何自然数 ν 皆成立, 因此

$$D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^\nu \lambda^\nu}{\nu!} \left(\int_{G_{\nu s}} K\begin{pmatrix} P_1, & \cdots, & P_\nu \\ P_1, & \cdots, & P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \cdots dP_\nu \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1,\cdots,k_\nu=1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, & \cdots, & M_{k_\nu} \end{pmatrix} \right) = O(\varepsilon(n)).$$

此处与"O"有关的常数仅依赖于 λ, K, f, 即存在常数 $n_0 = n_0(\lambda, K, f)\ (\geqslant r)$, 使当 $n > n_0$ 时

$$|D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2^r}. \tag{16}$$

选取 r 满足引理 1 之要求，则当 $n > n_0$ 时，由(10)，(11)，(14)，(16)得

$$|D(\lambda) - \Delta(\lambda)| \leqslant |D(\lambda) - D_r(\lambda)| + |D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda)| + |\Delta_r(\lambda) - \Delta(r)| \leqslant \frac{3}{2^r} \leqslant \frac{1}{2}|D(\lambda)|,$$

因此

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant |D(\lambda)| - |D(\lambda) - \Delta(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|D(\lambda)|.$$

引理证完.

引理 3. 方程(1)的解 $\varphi(P) \in H_s^\alpha(c(\lambda, K, f))$.

证. 由

$$\varphi(P) - f(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q)\varphi(Q)dQ,$$

得

$$|(\varphi(P) - f(P))^{(\alpha,\cdots,\alpha)}| \leqslant \sup_{Q \in G_s} |K(P, Q)^{(\alpha,\cdots,\alpha)}| |\lambda| \int_{G_s} |\varphi(Q)| dQ \leqslant c(\lambda, K, f),$$

因此 $\varphi(P) - f(P) \in H_s^\alpha(c(\lambda, K, f))$，从而

$$\varphi(P) = f(P) + (\varphi(P) - f(P)) \in H_s^\alpha(c(\lambda, K, f)).$$

引理证完.

定理 1 的证明. 由引理 3 可知，当 P 固定时，$K(P, Q)\varphi(Q) \in H_s^\alpha(c(\lambda, K, f))$，所以

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} K(P, M_k)\varphi(M_k) + f(P) + O(\varepsilon(n)), \tag{17}$$

从而

$$\varphi(M_j) = \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} K(M_j, M_k)\varphi(M_k) + f(M_j) + O(\varepsilon(n)),$$

$$1 \leqslant j \leqslant n \tag{18}$$

与(7)式相减得线性方程组

$$z_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} z_k + b_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

此处

$$z_j = \varphi(M_j) - \tilde{\varphi}(M_j),$$

$$a_{jk} = \frac{\lambda}{n} K(M_j, M_k),$$

$$b_j = O(\varepsilon(n)). \tag{20}$$

命 $\Delta_k(\lambda)$ 为将 $\Delta(\lambda)$ 的第 k 列

$$\left(\frac{-\lambda}{n} K(M_1, M_k), \cdots, 1 - \frac{\lambda}{n} K(M_k, M_k), \cdots, -\frac{\lambda}{n} K(M_n, M_k)\right)' \tag{21}$$

换为

$$(b_1, \cdots, b_n)' \tag{22}$$

而得来的行列式，则得

$$z_j = \frac{\Delta_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{23}$$

由引理 2 可知当 n 充分大时有

$$|\Delta(\lambda)| > \frac{1}{2} |D(\lambda)| > 0.$$

又因

$$\left|\frac{\lambda}{n} K(M_j, M_k)\right| \leqslant \frac{|\lambda| C}{n},$$

所以由引理 1.3 得

$$|\Delta_j| \leqslant |b_j B_j| + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} |b_k B_k|$$

$$\leqslant \gamma_1 |b_j| + \frac{\gamma_1}{n} \sum_{k=1}^{n} |b_k| = O(\varepsilon(n)), \tag{24}$$

此处 B_k 为 b_k 在 $\Delta_k(\lambda)$中的余子式，因此由(23)得

$$z_j = O(\varepsilon(n)), \ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{25}$$

代入(17)即得定理.

特别取 $M_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为第四章所引入的各种点集,即得到种种具体的关于 $\varphi(P)$ 的近似逼近公式.

§ 3. 第二类 Volterra 型积分方程的渐近解法

本节将研究第二类 Volterra 型积分方程

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, y)\varphi(y)dy + f(x) \tag{1}$$

的渐近解法问题, 此处 $f \in H_1^\alpha(C)$ 及 $K(x, y) \in H_2^\alpha(C)$ 为已知函数.

引入记号

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}, & \text{当 } \alpha > 1, \\ \dfrac{2\alpha^2}{1 + 4\alpha - \alpha^2}, & \text{当 } 1 \geqslant \alpha > 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$q = [p^{\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}}], \tag{3}$$

$$Q = \left[\mu(\alpha) \frac{\log_2 p}{\log_2\log_2 3p}\right] \tag{4}$$

及

$$B_{k,\nu,p}(a) = \sum_{m_1 \cdots m_\nu < q} e^{\frac{-2\pi i(m_1 + m_2 a + \cdots + m_\nu a^{\nu-1})k}{p}} \times \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \cdots + m_\nu x_\nu)} dx_1 \cdots dx_\nu, \tag{5}$$

其中 p 表示素数.

定理 1. 存在整数 $a(=a(p))$, 使方程(1)的解可以表示为

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{Q} B_{k,\nu,p}(a) K\left(x, \frac{k}{p}\right) K\left(\frac{k}{p}, \frac{ak}{p}\right) \cdots K\left(\frac{a^{\nu-2}k}{p}, \frac{a^{\nu-1}k}{p}\right) f\left(\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right) + O(p^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}), \tag{6}$$

此处与"O"有关的常数仅依赖于 K, f, ε.

证. 习知方程(1)的解 $\varphi(x)$ 可以表为 Neumann 级数

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x), \tag{7}$$

此处

$$\varphi_\nu(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} R_\nu dx_1 \cdots dx_\nu, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} R_\nu &= R_\nu(x, x_1, \cdots, x_\nu) \\ &= K(x, x_1)K(x_1, x_2)\cdots K(x_{\nu-1}, x_\nu)f(x_\nu). \end{aligned} \tag{9}$$

易知 $R_\nu \in H_{\nu+1}^\alpha(2^{(\alpha+1)(\nu+1)}C^{\nu+1})$, 因此

$$\begin{aligned} |\varphi_\nu(x)| &\leqslant 2^{(\alpha+1)(\nu+1)} C^{\nu+1} \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} dx_1 \cdots dx_\nu \\ &\leqslant \frac{2^{(\alpha+1)(\nu+1)} C^{\nu+1}}{\nu!}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=Q+1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \right| &\leqslant \sum_{\nu=Q+1}^{\infty} \frac{2^{(\alpha+1)(\nu+1)} C^{\nu+1}}{\nu!} \leqslant \frac{c(C, \alpha)^Q}{Q!} \\ &\leqslant c(K, f, \varepsilon) p^{-\mu(\alpha)+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{10}$$

命

$$\begin{aligned} S_\nu &= S_\nu(x, x_1, \cdots, x_\nu) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} K\left(x, \frac{k}{p}\right) K\left(\frac{k}{p}, \frac{ak}{p}\right) \cdots K\left(\frac{a^{\nu-2}k}{p}, \frac{a^{\nu-1}k}{p}\right) \\ &\quad \times f\left(\frac{a^{\nu-1}k}{p}\right) \sum_{\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_\nu < q} e^{\frac{-2\pi i(m_1+m_2 a+\cdots+m_\nu a^{\nu-1})k}{p}} e^{2\pi i(m_1 x_1+\cdots+m_\nu x_\nu)}, \end{aligned} \tag{11}$$

则由定理 9.5.3 可知存在整数 $a(=a(p))$ 使

$$\|R_\nu - S_\nu\|_{L_2} \leqslant C^{\nu+1} c(\alpha, \varepsilon)^{\nu+1} \nu!^{\frac{1}{2}} p^{-\mu(\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}},$$

因此

$$\begin{aligned} &\left|\varphi_\nu(x) - \int_0^x \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} S_\nu dx_1 \cdots dx_\nu\right| \\ &\leqslant \int_0^x \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} |R_\nu - S_\nu| dx_1 \cdots dx_\nu \end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\int_0^x \cdots \int_0^{x_{\nu-1}} dx_1 \cdots dx_\nu\right)^{\frac{1}{2}} \|R_\nu - S_\nu\|_{L_2}$$

$$\leqslant C^{\nu+1} c(\alpha, \varepsilon)^\nu p^{-\mu(\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant Q. \tag{12}$$

由(7),(10),(12)即得定理.

§4. Fredholm 方程的特征值与特征函数问题

当 $f(x) = 0$ 时,第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

称为齐次的. 若有 λ 使方程(1)有非零解 $\varphi(x)$, 则 λ 称为核 $K(x, y)$ 的特征值, 而函数 $\varphi(x)$ 称为 λ 所对应的 $K(x, y)$ 的特征函数. λ 所对应的在复数域上最大的线性独立的特征函数个数称为 λ 的重数.

我们常假定 $K(x, y) \in H_2^\alpha(C)$ 且为非零实函数. 本节将研究最小特征值与其对应之特征函数的近似逼近问题. 为此先征引一些积分方程方面熟知的结果(参看 Владимиров, В. С. [1]).

引理 1. 假定 $K(x, y) = K(y, x)$, 则方程 (1) 必有特征值, 特征值又不超过可数无穷多个, 皆位于实轴上, 不具有有限极限点,且每一特征值的重数都是有限的.

将特征值按其绝对值的大小排列为

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \tag{2}$$

(若 λ 之重数为 k, 则在(2)中重复出现 k 次). 其对应之特征函数亦分别记为

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \tag{3}$$

(不妨假定 $\|\varphi_i\|_{L_2} = 1, i = 1, 2, \cdots$).

引理 2. 假定 $K(x, y) = K(y, x)$, 且当 $(x, y) \in G_2$ 时, $K(x, y) > 0$, 则 λ_1 为正与单的, 且 $\varphi_1(x) > 0 (x_1 \in G_1)$.

由引理 1, 引理 2 可知,在引理 2 的假定下有

$$0 < \lambda_1 < |\lambda_2| \leqslant \cdots. \tag{4}$$

假定 $f \in H_1^\alpha(C)$ 为任意适合于

$$\|f\|_{L_2} = 1 \tag{5}$$

之非负实函数(例如取 $f(x)=1$ 即可),则由 Schwarz 不等式得

$$0 < c_1 = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx \leqslant 1. \tag{6}$$

记

$$\Phi_s(x) = \frac{\int_{G_s} R_s d\mathbf{x}}{\|R_s\|_{L_2}}, \quad s \geqslant 1, \tag{7}$$

及

$$\Lambda_s = \frac{\|R_{s-1}\|_{L_2}}{\|R_s\|_{L_2}}, \quad s \geqslant 2, \tag{8}$$

此处

$$\begin{aligned} R_s &= R_s(x, x_1, \cdots, x_s) \\ &= K(x, x_1)K(x_1, x_2)\cdots K(x_{s-1}, x_s)f(x_s), \end{aligned} \tag{9}$$

则得

引理 3. 在引理 2 与上述假定下,有下列估计

$$0 \leqslant \Lambda_s - \lambda_1 \leqslant \frac{1-c_1^2}{c_1^2} \cdot \frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\right)^{2s-2}, \quad s \geqslant 2 \tag{10}$$

与

$$\|\Phi_s - \varphi_1\|_{L_2} \leqslant \frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\right)^s, \quad s \geqslant 1. \tag{11}$$

引入记号

$$R_s^* = R_s^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_s\left(x, \frac{a_1 k}{n}, \cdots, \frac{a_s k}{n}\right) \tag{12}$$

与

$$\widetilde{R}_s = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_s\left(\frac{a_1 k}{n}, \cdots, \frac{a_{s+1} k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

则得

定理 1. 假定同余式

$$\sum_{i=1}^{s+1} a_i m_i \equiv 0 \pmod n \tag{14}$$

在范围

$$\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{s+1}\leqslant M,\quad (m_1,\cdots,m_{s+1})\neq(0,\cdots,0)\tag{15}$$

中无解，则

$$\left|\frac{\tilde{R}_{s-1}}{\tilde{R}_s}-\lambda_1\right|\leqslant\frac{1-c_1^2}{c_1^2}\cdot\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\right)^{2s-2}+c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon},\quad s\geqslant 2\tag{16}$$

与

$$\left\|\frac{R_s^*(x)}{\tilde{R}_s}-\varphi_1(x)\right\|_{L_2}\leqslant\frac{\sqrt{1-c_1^2}}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\right)^s+c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon},\quad s\geqslant 1.\tag{17}$$

证. 习知

$$R_s\in H_{s+1}^\alpha(2^{(\alpha+1)(s+1)}C^{s+1}),\quad R_s^2\in H_{s+1}^\alpha(2^{2(\alpha+1)(s+1)}C^{2(s+1)}),\tag{18}$$

因此由定理 7.5.1 可知

$$\left|\|R_s\|_{L_2}^2-\tilde{R}_s^2\right|\leqslant c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon},$$

从而

$$\left|\|R_s\|_{L_2}-\tilde{R}_s\right|\leqslant c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon}.\tag{19}$$

由假定可知 $\|R_s\|_{L_2}=c(K,f)>0$，所以不妨假定 $\tilde{R}_s=c(K,f)>0$，因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tilde{R}_{s-1}}{\tilde{R}_s}-\Lambda_s\right|&=\frac{\left|\tilde{R}_s\|R_{s-1}\|_{L_2}-\tilde{R}_{s-1}\|R_s\|_{L_2}\right|}{\tilde{R}_s\|R_s\|_{L_2}}\\&\leqslant\frac{\left|\|R_s\|_{L_2}(\|R_{s-1}\|_{L_2}-\tilde{R}_{s-1})+\|R_{s-1}\|_{L_2}(\tilde{R}_s-\|R_s\|_{L_2})\right|}{c(K,f)}\\&\leqslant c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon}.\end{aligned}\tag{20}$$

故由引理 3 及

$$\left|\frac{\tilde{R}_{s-1}}{\tilde{R}_s}-\lambda_1\right|\leqslant\left|\frac{\tilde{R}_{s-1}}{\tilde{R}_s}-\Lambda_s\right|+|\Lambda_s-\lambda_1|$$

即得(16)式.

由定理 7.5.1 可知

$$\begin{aligned}\left\|\int_{G_s}R_s d\mathbf{x}-R_s^*\right\|_{L_2}&\leqslant\sup_{x\in G_1}\left|\int_{G_s}R_s d\mathbf{x}-R_s^*\right|\\&\leqslant c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon},\end{aligned}\tag{21}$$

从而由 Minkowski 不等式得

$$\left\|\frac{R_s^*}{\tilde{R}_s}-\Phi_s\right\|_{L_2} \leqslant c(K,f)\|\tilde{R}_s\int_{G_s} R_s d\mathbf{x}-\|R_s\|_{L_2}R_s^*\|_{L_2}$$

$$= c(K,f)\left\|\tilde{R}_s\left(\int_{G_s} R_s d\mathbf{x}-R_s^*\right)+R_s^*(\tilde{R}_s-\|R_s\|_{L_2})\right\|_{L_2}$$

$$\leqslant c(K,f)\left(\left\|\tilde{R}_s\left(\int_{G_s} R_s d\mathbf{x}-R_s^*\right)\right\|_L\right.$$

$$\left.+\|R_s^*(\tilde{R}_s-\|R_s\|_{L_2})\|_{L_2}\right) \leqslant c(K,f,\varepsilon)M^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{22}$$

故由引理 3 及

$$\left\|\frac{R_s^*}{\tilde{R}_s}-\varphi_1\right\|_{L_2} \leqslant \left\|\frac{R_s^*}{\tilde{R}_s}-\Phi_s\right\|_{L_2}+\|\Phi_s-\varphi_1\|_{L_2}$$

即得(17)式．定理证完．

用其它类型的求积公式，亦可以得到相应的 λ_1 与 φ_1 的逼近公式．

§5. 抛物型方程的 Cauchy 问题

本节将讨论抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right)u,$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\quad -\infty<x_\nu<\infty(1\leqslant\nu\leqslant s) \tag{1}$$

的近似解法问题．假定初值条件为

$$u(0,\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\in E_s^\alpha(C), \tag{2}$$

其中 $\alpha>1$．

定理 1. 若同余式

$$(\mathbf{a},\mathbf{m})=\sum_{i=1}^{s} a_i m_i\equiv 0(\bmod n) \tag{3}$$

在范围

$$\|\mathbf{m}\|\leqslant M,\quad \mathbf{m}\neq\mathbf{0} \tag{4}$$

中无解，则

$$\sup_{\mathbf{x}\in G_s}\left|u(t,\mathbf{x})-\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)e^{\frac{-2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}\right)\right.$$

$$\times e^{-4\pi^2(\mathbf{m},\mathbf{m})t+2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}\Big| \leqslant C\cdot c(\alpha, s, \varepsilon)M^{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1}+\varepsilon}, \quad (5)$$

此处 $N=[M^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}]$.

证. 命

$$u(t, \mathbf{x})=\sum C(t, \mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \quad (6)$$

则

$$\sum\frac{d}{dt}C(t, \mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}=\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right)u$$
$$=-\sum C(t, \mathbf{m})4\pi^2(\mathbf{m}, \mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}. \quad (7)$$

比较 $e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}$ 的系数得

$$\frac{d}{dt}C(t, \mathbf{m})=-4\pi^2(\mathbf{m}, \mathbf{m})C(t, \mathbf{m}),$$
$$\int\frac{dC(t, \mathbf{m})}{C(t, \mathbf{m})}=-4\pi^2(\mathbf{m}, \mathbf{m})\int dt,$$
$$C(t, \mathbf{m})=ce^{-4\pi^2(\mathbf{m},\mathbf{m})t}. \quad (8)$$

由于

$$C(\mathbf{0}, \mathbf{m})=C(\mathbf{m}), \quad (9)$$

此处 $C(\mathbf{m})$ 为 $f(\mathbf{x})$ 的 Fourier 系数，所以代入(8)式得 $c=C(\mathbf{m})$，即

$$C(t, \mathbf{m})=C(\mathbf{m})e^{-4\pi^2(\mathbf{m},\mathbf{m})t}. \quad (10)$$

因此

$$u(t, \mathbf{x})=\sum C(\mathbf{m})e^{-4\pi^2(\mathbf{m},\mathbf{m})t+2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \quad (11)$$

从而

$$\sup_{\mathbf{x}\in G_s}\Big|u(t, \mathbf{x})-\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)e^{\frac{-2\pi i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m})k}{n}}\right)$$
$$\times e^{-4\pi^2(\mathbf{m}, \mathbf{m})t+2\pi i(\mathbf{m}, \mathbf{x})}\Big| \leqslant \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2, \quad (12)$$

此处

$$\sum\nolimits_1=\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}\left|C(\mathbf{m})-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)e^{\frac{-2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}\right| \quad (13)$$

与

$$\sum\nolimits_2=\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N}|C(\mathbf{m})|, \quad (14)$$

故由定理 9.4.2 的证明即得定理.

§ 6. 椭圆型方程的 Dirichlet 问题

本节将研究椭圆型方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right)u=f \tag{1}$$

的近似解法问题. 假定 $f\in E_s^\alpha(C)(\alpha>1)$, 而且关于每一变数都是奇函数,求出满足(1),而且在 G_s 边界上取值 0 的解 u 的渐近表达式.

引入记号

$$g(\mathbf{x})=\sum B(\mathbf{m})C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{2}$$

此处 $C(\mathbf{m})$ 为 f 的 Fourier 系数,而 $B(\mathbf{m})$ 适合于

$$|B(\mathbf{m})|\leqslant\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^\omega}, \tag{3}$$

其中 ω 为满足

$$0\leqslant\omega\leqslant 1 \tag{4}$$

的常数. 又定义

$$\nu(\alpha,\omega)=\frac{\alpha(\alpha+\omega-1)}{2\alpha-1}. \tag{5}$$

定理 1. 假定 $s\geqslant 2$, 若同余式 (5.3) 在范围 (5.4) 中无解, 则

$$\sup_{\mathbf{x}\in G_s}\left|u(\mathbf{x})-\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\phi_k(\mathbf{x})\right|$$
$$\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)M^{-\nu\left(\alpha,\frac{2}{s}\right)+\varepsilon}, \tag{6}$$

此处

$$\phi_k(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi^2 n}\sum_{\|\mathbf{m}\|<N}{}'\frac{e^{2\pi i\left(\mathbf{m},\mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)}}{(\mathbf{m},\mathbf{m})},\quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{7}$$

其中

$$N=[M^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}].$$

引理 1. 若 $a_i\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant s)$, 则

$$(a_1\cdots a_s)^{\frac{1}{s}} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_s}{s}. \tag{8}$$

证明见华罗庚[1],第二十章.

引理 2. 若同余式(5.3)在(5.4)中无解,则

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \sup_{\mathbf{x}\in G_t}\left| g(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)\chi_k(\mathbf{x})\right| \\ &\leqslant C\cdot c(\alpha,\omega,s,\varepsilon)M^{-\nu(\alpha,\omega)+\varepsilon},\end{aligned} \tag{9}$$

此处

$$\chi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{\|\mathbf{m}\|<N} B(\mathbf{m})e^{2\pi i\left(\mathbf{m},\,\mathbf{x}-\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)},\quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{10}$$

证. 由(2),(9)可知

$$\mathfrak{S} \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{11}$$

此处

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\|\mathbf{m}\|<N} |B(\mathbf{m})|\left| C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)e^{\frac{-2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}\right| \tag{12}$$

与

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N} |B(\mathbf{m})||C(\mathbf{m})|. \tag{13}$$

习知

$$\begin{aligned}&\left| C(\mathbf{m}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\mathbf{a}}{n}\right)e^{\frac{-2\pi i(\mathbf{a},\mathbf{m})k}{n}}\right| \\ &\leqslant C\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^{\alpha}}\end{aligned}$$

(见 § 9.4), 所以由定理 7.5.1 及引理 9.3.1 得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &\leqslant C\sum_{k=0}^{[\log_2 N]}\sum_{2^{-k-1}N\leqslant\|\mathbf{m}\|<2^{-k}N}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\omega}}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^{\alpha}} \\ &\leqslant C\sum_{k=0}^{[\log_2 N]}(2^{-k-1}N)^{-\omega}\sum_{\|\mathbf{m}\|<2^{-k}N}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)}{}'\frac{1}{\|\mathbf{l}+\mathbf{m}\|^{\alpha}}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\cdot c(\alpha,s)N^{\alpha-\omega}\sum_{k=0}^{[\log_2 N]}2^{-(\alpha-\omega)k}\sum_{(\mathbf{a},\mathbf{l})\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)}{}' \frac{1}{\|\mathbf{l}\|^{\alpha}}$$

$$\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\varepsilon)N^{\alpha-\omega}M^{-\alpha+\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(\alpha-\omega)k}$$

$$\leqslant C\cdot c(\alpha,\omega,s,\varepsilon)M^{-\nu(\alpha,\omega)+\varepsilon}. \tag{14}$$

取 $\varepsilon<\alpha-1$，则

$$\Sigma_2\leqslant C\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha+\omega}}\leqslant C\sum_{\|\mathbf{m}\|\geqslant N}\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{\alpha+\omega-1-\varepsilon}\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}}$$

$$\leqslant CN^{-\alpha-\omega+1+\varepsilon}\sum\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^{1+\varepsilon}}\leqslant C\cdot c(s,\varepsilon)M^{-\nu(\alpha,\omega)+\varepsilon}. \tag{15}$$

由(11),(14),(15)即得引理.

定理 1 的证明. 定义

$$g(\mathbf{x})=\sum B(\mathbf{m})C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}, \tag{16}$$

此处 $C(\mathbf{m})$ 为 f 的 Fourier 系数及

$$B(\mathbf{m})=\begin{cases}0, & \text{当 } \mathbf{m}=\mathbf{0},\\ -\dfrac{1}{4\pi^2(\mathbf{m},\mathbf{m})}, & \text{当 } \mathbf{m}\neq\mathbf{0},\end{cases} \tag{17}$$

下面证明 $g(\mathbf{x})$ 为方程 (1) 的解. 由于 $f(\mathbf{x})$ 对每一变数都是奇函数,所以

$$C(\mathbf{0})=0 \tag{18}$$

与

$$C(m_1,\cdots,m_\nu,\cdots,m_s)=-C(m_1,\cdots,-m_\nu,\cdots,m_s),\quad 1\leqslant\nu\leqslant s. \tag{19}$$

由(17),(18)可知

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right)g=\sum{}'C(\mathbf{m})e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}=f(\mathbf{x}), \tag{20}$$

又由(19)得

$$g(x_1,\cdots,-x_\nu,\cdots,x_s)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum{}'\frac{C(\mathbf{m})}{(\mathbf{m},\mathbf{m})}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})-4\pi i m_\nu x_\nu}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum{}'\frac{C(\mathbf{m})}{(\mathbf{m},\mathbf{m})}e^{2\pi i(\mathbf{m},\mathbf{x})}=-g(\mathbf{x}),$$

即得

$$g(\mathbf{x})|_{x_\nu=0}=0,\quad 1\leqslant \nu\leqslant s, \tag{21}$$

因此 $g(\mathbf{x})$ 为方程(1)的解，且在 G_s 的边界上取值0，换言之

$$u(\mathbf{x})=g(\mathbf{x}). \tag{22}$$

当 $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ 时，由引理 1 可知

$$(\mathbf{m},\mathbf{m})\geqslant s\|\mathbf{m}\|^{\frac{2}{s}},$$

所以由(17)得

$$|B(\mathbf{m})|\leqslant\frac{1}{4\pi^2 s\|\mathbf{m}\|^{\frac{2}{s}}}. \tag{23}$$

故由引理 2 即得定理.

§7. 几点注记

1. 当第二类 Fredholm 型积分方程中的 $K(P,Q)\in B_{2s}$ 及 $f\in B_s$ 时，我们仍可用 §2 的方法，将积分方程化为线性代数方程组求解.

2. §3 的方法还可以用来处理更一般的积分方程

$$\varphi(x_1,\cdots,x_{s+l})=\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^{x_{s+1}}\cdots\int_0^{x_{s+l}}K(x_1,\cdots,x_{s+l},y_1,\cdots,y_{s+l})\varphi(y_1,\cdots,y_{s+l})dy_1\cdots dy_{s+l}+f(x_1,\cdots,x_{s+l})$$

的近似解法问题，此处 $s\geqslant 0$，$l\geqslant 1$，$f\in H^a_{s+l}(C)$ 及 $K\in H^a_{2(s+l)}(C)$. 又当 $f\in B_{s+l}$, $K\in B_{2(s+l)}$ 时，亦可以处理.

3. 当 λ 充分小时，我们亦可以用 §3 的方法处理第二类 Fredholm 型积分方程的近似解法问题.

4. 用 §3 的方法还可以处理更一般的线性抛物型方程

$$\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t}=\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)u(t,\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{s}a_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}+a(t,\mathbf{x})u(t,\mathbf{x})+f(t,\mathbf{x}),$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\quad -\infty<x_i<\infty(1\leqslant i\leqslant s)$$

的近似解法问题，此处 $u(0,\mathbf{x})=0$, a_i, a, f 皆属于 $H^a_{s+1}(C)$.

我们首先将微分方程的解表为第二类 Volterra 型积分方程的

解的形式，然后用迭代法将积分方程的解表为 Neumann 级数形式，再用 §3 的方法即能将解表为有限和形式.

5. §4 的方法可以用来处理高维的第二类齐次 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q)\varphi(Q)dQ$$

的特征值与特征函数问题，此处 $K(P, Q) \in H_{2s}^{\alpha}(C)$ 或 B_{2s}.

注　　释

§2. 见 Коробов, Н. М. [3, 7]，Шарыгин, И. Ф. [1]，王元[2]，华罗庚与王元[3, 6, 7].

§3. 见 Шахов, Ю. Н. [1, 3]，定理 1 则为 Шахов, Ю. Н. 结果的改进(见王元 [1, 2]，华罗庚与王元 [3, 6, 7]).

§4. 参看 Шахов, Ю. Н. [2].

§6. 见 Коробов, Н. М. [7]，定理 1 则为 Коробов, Н. М. 结果的改进(见王元 [3, 4]).

§7. 参看 Коробов, Н. М. [7]，华罗庚与王元 [3, 6, 7]，Hlawka, E. [4, 5]，Рябенький, В. С. [2]，王元，朱尧辰与蒋运财[1]，Стоянцев, В. Т. [1]，徐广善[1].

附录　格点点集表

记 $\mathbf{h}$, $\mathbf{m}$ 为 s 维整矢量, n 为正整数. $W_2(n, \mathbf{h})$ 与 $W_4(n, \mathbf{h})$ 的定义见 § 8.1. 若同余式 $(\mathbf{h},\mathbf{m}) \equiv 0 \pmod n$ 在范围 $\|\mathbf{m}\| \leqslant M$ 中无解,则记 M 之确上界为 $\rho(n, \mathbf{h})$.

当 $s = 2$ 时,格点点集取作

$$\left(\left\{\frac{h}{F_m}\right\}, \left\{\frac{F_{m-1}h}{F_m}\right\}\right), \quad 1 \leqslant h \leqslant F_m,$$

此处 F_m 为 Fibonacci 贯,即适合于

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{m+1} = F_m + F_{m-1}, \quad m \geqslant 1$$

之整数贯,列成表 1.

当 $s > 2$ 时, 用第八章介绍的方法列成表 (2)—(12).

在表(11)中,当 $s = 12, 13$ 时, n 所对应的 $\mathbf{h}(n)$,应分别去掉分量 h_{13}, h_{14} 与 h_{14}. 为了避免混淆, 我们以 $W_2(s, n, \mathbf{h})$ 表示 s 维的 n, $\mathbf{h}$ 所对应的 $W_2(n, \mathbf{h})$. 表(12)亦相同.

(1)　$(s = 2,\ h_1 = 1,\ h_2 = F_{m-1},\ n = F_m)^*$

n	13	21	34	55	89
$W_2(n,\mathbf{h})$	4.7586×10^{-1}	2.0909×10^{-1}	8.9745×10^{-2}	3.8148×10^{-2}	1.6033×10^{-2}
n	144	233	377	610	987
$W_2(n,\mathbf{h})$	6.6851×10^{-3}	2.7673×10^{-3}	1.1388×10^{-3}	4.6619×10^{-4}	1.8900×10^{-4}
n	1,597	2,584	4,181	6,765	10,946
$W_2(n,\mathbf{h})$	7.7127×10^{-5}	3.1200×10^{-5}	1.2581×10^{-5}	5.0595×10^{-6}	2.0293×10^{-6}
n	17,711	28,657	46,368	75,025	
$W_2(n,\mathbf{h})$	8.1206×10^{-7}	3.2376×10^{-7}	1.2819×10^{-7}	5.127×10^{-8}	

(2) ($s = 3,\ h_1 = 1$)

n	h_2	h_3	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$	$W_4(n,\mathbf{h})$
21	3	8	3	2.3320	1.1700×10^{-1}
35	11	16	5	1.1074	2.1437×10^{-2}
66	10	24	8	3.9332×10^{-1}	2.8304×10^{-3}
86	30	40	10	2.6836×10^{-1}	1.3069×10^{-3}
135	29	42	13	1.4577×10^{-1}	3.4114×10^{-4}
185	26	64	20	8.5667×10^{-2}	1.0860×10^{-4}
266	27	69	27	5.0586×10^{-2}	3.5702×10^{-5}
418	90	130	40	2.1688×10^{-2}	6.3870×10^{-6}
597	63	169	55	1.3007×10^{-2}	2.0000×10^{-6}
828	285	358	72	7.7157×10^{-3}	7.1265×10^{-7}
1,010	140	237	86	5.2751×10^{-3}	2.9203×10^{-7}
1,220	319	510	108	3.6308×10^{-3}	1.1552×10^{-7}
1,459	256	373	114	2.9263×10^{-3}	9.7463×10^{-8}
1,626	572	712	140	2.1506×10^{-3}	4.4293×10^{-8}
1,958	202	696	162	1.5620×10^{-3}	2.2093×10^{-8}
2,440	638	1,002	216	1.0313×10^{-3}	8.5161×10^{-9}
3,237	456	1,107	252	7.0670×10^{-4}	4.9006×10^{-9}
4,044	400	1,054	308	4.5620×10^{-4}	$1,8752\times10^{-9}$
5,037	580	1,997	390	3.3527×10^{-4}	9.8872×10^{-10}
6,066	600	1,581	460	2.3416×10^{-4}	4.6664×10^{-10}
8,191	739	5,515	364	1.7×10^{-4}	4.0×10^{-10}
10,007	544	5,733	400	1.3×10^{-4}	2.5×10^{-10}
20,039	5,704	12,319	396	6.4×10^{-5}	
28,117	19,449	5,600	585	3.0×10^{-5}	
39,029	10,607	26,871	570	2.1×10^{-5}	
57,091	48,188	21,101	1,084	9.8×10^{-6}	
82,001	21,252	67,997	1,978	4.1×10^{-6}	
*140,052	34,590	112,313		3.33×10^{-6}	
*314,694	77,723	252,365		1.23×10^{-6}	

(3) $(s=4,\ h_1=1)$

n	h_2	h_3	h_4	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$	$W_4(n,\mathbf{h})$
60	8	18	22	4	3.3875	8.5025×10^{-2}
118	18	40	52	6	1.4214	1.5513×10^{-2}
180	8	46	74	8	8.1807×10^{-1}	5.2230×10^{-3}
286	16	94	138	12	4.4143×10^{-1}	1.5466×10^{-3}
440	21	136	216	15	2.5001×10^{-1}	4.3550×10^{-4}
562	53	89	221	20	1.8208×10^{-1}	2.0716×10^{-4}
732	248	294	324	24	1.1232×10^{-1}	8.5499×10^{-5}
932	116	288	314	26	8.0987×10^{-2}	4.7288×10^{-5}
1,142	150	187	274	32	6.7770×10^{-2}	2.9213×10^{-5}
1,354	492	550	658	40	4.5581×10^{-2}	1.2280×10^{-5}
2,129	766	1,281	1,906	32	2.7×10^{-2}	
3,001	174	266	1,269	46	1.7×10^{-2}	
4,001	113	766	2,537	51	1.1×10^{-2}	
5,003	792	1,889	191	32	9.2×10^{-3}	
6,007	1,351	5,080	3,086	80	5.9×10^{-3}	
8,191	2,488	5,939	7,859	72	3.8×10^{-3}	
10,007	1,206	3,421	2,842	84	3.0×10^{-3}	
20,039	19,668	17,407	14,600	60	1.6×10^{-3}	
28,117	17,549	1,900	24,455	144	6.5×10^{-4}	
39,029	30,699	34,367	605	135	4.9×10^{-4}	
57,091	52,590	48,787	38,790	268	2.8×10^{-4}	
82,001	57,270	58,903	17,672	260	1.7×10^{-4}	
100,063	92,313	24,700	95,582	352	1.1×10^{-4}	
*147,312	136,641	116,072	76,424		8.5376×10^{-5}	

(4) $(s=5,\ h_1=1)$

n	h_2	h_3	h_4	h_5	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\ \mathbf{h})$
1,069	63	762	970	177	6	7.4×10^{-1}
1,543	58	278	694	134	8	4.2×10^{-1}
2,129	618	833	1,705	1,964	9	3.1×10^{-1}
3,001	408	1,409	1,681	1,620	18	1.7×10^{-1}
4,001	1,534	568	3,095	2,544	17	1.2×10^{-1}
5,003	840	177	3,593	1,311	16	9.2×10^{-2}
6,007	509	780	558	1,693	22	7.0×10^{-2}
8,191	1,386	4,302	7,715	3,735	30	4.3×10^{-2}
10,007	198	9,183	6,967	8,507	36	3.4×10^{-2}
15,019	10,641	2,640	6,710	784	18	2.9×10^{-2}
20,039	11,327	11,251	12,076	18,677	21	1.8×10^{-2}
33,139	32,133	17,866	21,281	32,247	60	8.5×10^{-3}
51,097	44,672	45,346	7,044	14,242	35	5.4×10^{-3}
71,053	33,755	65,170	12,740	6,878	80	2.8×10^{-3}
100,063	90,036	77,477	27,253	6,222	96	1.7×10^{-3}
*374,181	343,867	255,381	310,881	115,892		1.01×10^{-3}

(5) $(s=6,\ h_1=1)$

n	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$
2,129	41	1,681	793	578	279	4	2.0
3,001	233	271	122	1,417	51	8	1.3
4,001	1,751	1,235	1,945	844	1,475	6	9.5×10^{-1}
5,003	2,037	1,882	1,336	4,803	2,846	8	6.8×10^{-1}
6,007	312	1,232	5,943	4,060	5,250	9	5.6×10^{-1}
8,191	1,632	1,349	6,380	1,399	6,070	12	3.7×10^{-1}
10,007	2,240	4,093	1,908	931	3,984	12	2.9×10^{-1}
15,019	8,743	8,358	6,559	2,795	772	8	2.0×10^{-1}
20,039	5,557	150	11,951	2,461	9,179	12	1.3×10^{-1}
33,139	18,236	1,831	19,143	5,522	22,910	18	6.8×10^{-2}
51,097	9,931	7,551	29,682	44,446	17,340	24	4.2×10^{-2}
71,053	18,010	3,155	50,203	6,605	13,328	18	3.3×10^{-2}
100,063	43,307	15,440	39,114	43,534	39,955	30	1.8×10^{-2}
*114,174	107,538	88,018	15,543	80,974	56,747		1.47×10^{-2}
*302,686	285,095	233,344	41,204	214,668	150,441		4.06×10^{-3}

(6) ($s = 7,\ h_1 = 1$)

n	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$
*3,997	3,888	3,564	3,034	2,311	1,417	375		5.7567
*11,215	10,909	10,000	8,512	6,485	3,976	1,053		1.9416
15,019	12,439	2,983	8,607	7,041	7,210	6,741	6	1.2
24,041	1,833	18,190	21,444	23,858	1,135	12,929	6	6.9×10^{-1}
33,139	7,642	9,246	5,584	23,035	32,241	30,396	6	5.0×10^{-1}
46,213	37,900	17,534	41,873	32,280	15,251	26,909	12	3.3×10^{-1}
57,091	35,571	45,299	51,436	34,679	1,472	8,065	12	2.5×10^{-1}
71,053	31,874	36,082	13,810	6,605	68,784	9,848	10	2.1×10^{-1}
*84,523	82,217	75,364	64,149	48,878	29,969	7,936		2.0407×10^{-1}
100,063	39,040	62,047	89,839	6,347	30,892	64,404	16	1.4×10^{-1}
*172,155	167,459	153,499	130,657	99,554	61,040	18,165		7.2998×10^{-2}
*234,646	228,245	209,218	178,084	135,691	83,197	22,032		8.0209×10^{-2}
*462,891	450,265	412,730	351,310	267,681	164,124	43,464		1.9397×10^{-2}
*769,518	748,528	686,129	584,024	444,998	272,843	72,255		1.1891×10^{-2}
*957,838	931,711	854,041	726,949	553,900	339,614	89,937		7.9563×10^{-3}

(7) $(s = 8,\ h_1 = 1)$

n	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$
*3,997	3,888	3,564	3,034	2,311	1,417	375	3,211		2.8252×10
*11,215	10,909	10,000	8,512	6,485	3,976	1,053	9,010		9.6498
24,041	17,441	21,749	5,411	12,326	3,144	21,024	6,252	3	3.9
*28,832	27,850	24,938	20,195	13,782	5,918	25,703	15,781		3.4501
33,139	3,520	29,553	3,239	1,464	16,735	19,197	3,019	6	2.7
46,213	5,347	30,775	35,645	11,403	16,894	32,016	16,600	4	1.9
57,091	17,411	46,802	9,779	16,807	35,302	1,416	47,755	6	1.5
71,053	60,759	26,413	24,409	48,215	51,048	19,876	29,096	6	1.2
*84,523	82,217	75,364	64,149	48,878	29,969	7,936	67,905		9.8761×10^{-1}
100,063	4,344	58,492	29,291	60,031	10,486	22,519	60,985	9	7.6×10^{-1}
*172,155	167,459	153,499	130,657	99,554	61,040	18,165	138,308		4.5537×10^{-1}
*234,646	228,245	209,218	178,084	135,691	83,197	22,032	188,512		4.0554×10^{-1}
*462,891	450,265	412,730	351,310	267,681	164,124	43,464	371,882		1.6240×10^{-1}
*769,518	748,528	686,129	584,024	444,998	272,843	72,255	618,224		1.1714×10^{-1}
*957,838	931,711	854,041	726,949	553,900	339,614	89,937	769,518		7.9943×10^{-2}

(8) $(s = 9,\ h_1 = 1)$

n	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$
*3,997	3,888	3,564	3,034	2,311	1,417	375	3,211	1,962		1.2177×10^2
*11,215	10,909	10,000	8,512	6,485	3,976	1,053	9,010	5,506		4.1751×10
33,139	68	4,624	16,181	6,721	26,221	26,661	23,442	3,384	3	1.35×10
*42,570	41,409	37,957	32,308	24,617	15,094	3,997	34,200	20,901		1.0496×10
46,213	8,871	40,115	20,065	30,352	15,554	42,782	17,966	33,962	3	9.5
57,091	20,176	12,146	23,124	2,172	33,475	5,070	42,339	36,122	4	7.5
71,053	26,454	13,119	27,174	17,795	22,805	43,500	45,665	49,857	4	6.0
100,063	70,893	53,211	12,386	27,873	55,528	16,417	17,628	14,997	6	4.1
159,053	60,128	101,694	23,300	43,576	57,659	42,111	85,501	93,062	8	2.5
*172,155	167,459	153,499	130,657	99,554	61,040	18,165	138,308	84,523		2.3708
*234,646	228,245	209,218	178,084	135,691	83,197	22,032	188,512	115,204		1.8844
*462,891	450,265	412,730	351,310	267,681	164,124	43,464	371,882	227,266		9.8091×10^{-1}
*769,518	748,528	686,129	584,024	444,998	272,843	72,255	618,224	377,811		5.2643×10^{-1}
*957,838	931,711	854,041	726,949	553,900	339,614	89,937	769,518	470,271		4.1495×10^{-1}

(9) ($s = 10,\ h_1 = 1$)

n	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	$\rho(n,\mathbf{h})$	$W_2(n,\mathbf{h})$
*4,661	4,574	4,315	3,889	3,304	2,570	1,702	715	4,289	3,122		4.5284×10^2
*13,587	13,334	12,579	11,337	9,631	7,492	4,961	2,084	12,502	9,100		1.5565×10^2
*24,076	23,628	22,290	20,090	17,066	13,276	8,790	3,692	22,153	16,125		8.7861×10
*58,358	57,271	54,030	48,695	41,366	32,180	21,307	8,950	53,697	39,086		3.5680×10
85,633	37,677	35,345	3,864	54,821	74,078	30,354	57,935	51,906	56,279	2	2.4×10
103,661	45,681	57,831	80,987	9,718	51,556	55,377	37,354	4,353	27,595	2	2.1×10
115,069	65,470	650	95,039	77,293	98,366	70,366	74,605	55,507	49,201	2	1.7×10
130,703	64,709	53,373	17,385	5,244	29,008	52,889	66,949	51,906	110,363	4	1.4×10
155,093	90,485	20,662	110,048	102,308	148,396	125,399	124,635	10,480	44,198	4	1.2×10
*805,098	790,101	745,388	671,792	570,685	443,949	293,946	123,470	740,795	539,222		2.2918

(10)　($s = 11$, $h_1 = 1$)*

n	4,661	13,587	24,076	58,358	297,974	698,047	1,243,423	2,226,963	7,494,007
h_2	4,574	13,334	23,628	57,271	294,481	685,041	1,228,845	2,200,854	7,354,408
h_3	4,315	12,579	22,290	54,030	284,041	646,274	1,185,282	2,122,833	6,938,211
h_4	3,889	11,337	20,090	48,695	266,778	582,461	1,113,244	1,993,814	6,253,169
h_5	3,304	9,631	17,066	41,366	242,894	494,796	1,013,577	1,815,311	5,312,043
h_6	2,570	7,492	13,276	32,180	212,668	384,914	887,449	1,589,415	4,132,365
h_7	1,702	4,961	8,790	21,307	176,456	254,860	736,338	1,318,777	2,736,109
h_8	715	2,084	3,692	8,950	134,682	107,051	562,016	1,006,567	1,149,286
h_9	4,289	12,502	22,153	53,697	87,835	642,292	366,527	656,448	6,895,461
h_{10}	3,122	9,100	16,125	39,086	36,464	467,527	152,163	272,523	5,019,180
h_{11}	1,897	5,529	9,797	23,747	279,147	284,044	1,164,860	2,086,257	3,049,402
$W(n,h)$	1.9484×10^3	6.6344×10^2	3.7326×10^2	1.5215×10^2	3.0663×10	1.2000×10	8.1089	3.5998	6.3956×10^{-1}

(11) ($s = 12, 13, 14, h_1 = 1$)*

n	18,984	53,328	77,431	297,974	1,243,423	2,428,705	14,753,436	19,984,698	34,248,063
h_2	18,761	52,703	76,523	294,481	1,228,845	2,400,231	14,580,465	19,750,396	33,846,536
h_3	18,096	50,834	73,810	284,041	1,185,282	2,315,141	14,063,582	19,050,236	32,646,662
h_4	16,996	47,745	69,324	266,778	1,113,244	2,174,435	13,208,845	17,892,427	30,662,508
h_5	15,475	43,470	63,118	242,894	1,013,577	1,979,761	12,026,276	16,290,543	27,917,337
h_6	13,549	38,061	55,264	212,668	887,449	1,733,402	10,529,739	14,263,366	24,443,334
h_7	11,242	31,580	45,854	176,456	736,338	1,438,245	8,736,780	11,834,661	20,281,228
h_8	8,581	24,104	34,998	134,682	562,016	1,097,753	6,668,420	9,032,903	15,479,816
h_9	5,596	15,720	22,825	87,835	366,527	715,916	4,348,908	5,890,941	10,095,390
h_{10}	2,323	6,526	9,476	36,464	152,163	297,211	1,805,439	2,445,610	4,191,077
h_{11}	17,785	49,959	72,539	279,147	1,164,860	2,275,252	13,821,268	18,722,002	32,084,164
h_{12}	14,053	39,477	57,320	220,583	920,477	1,797,913	10,921,619	14,794,199	25,353,030
h_{13}	10,158	28,534	41,430	159,433	665,302	1,299,495	7,893,924	10,692,946	18,324,655
h_{14}	6,143	17,255	25,054	96,414	402,327	785,841	4,773,681	6,466,329	11,081,440
$W_2(12,n,h)$	1.3383×10^3	7.2406×10^2	5.0613×10^2	1.2950×10^2	3.0959×10	1.5545×10			
$W_2(13,n,h)$	5.7244×10^3	3.0997×10^3	2.1352×10^3	5.5621×10^2	1.3486×10^2	5.8770×10	1.0164×10	8.7558	4.0051
$W_2(14,n,h)$	3.7649×10^4	1.3390×10^4	9.2229×10^3	2.4034×10^3	5.8026×10^2	2.9691×10^2	4.7393×10	3.5379×10	2.0247×10

(12) ($s = 15, 16, 17, 18, h_1 = 1$)*

n	70,864	139,489	1,139,691	2,422,957	4,395,774	14,271,038	55,879,244
h_2	70,353	138,484	1,131,480	2,398,094	4,364,102	14,168,215	55,476,633
h_3	68,825	135,476	1,106,904	2,323,761	4,269,316	13,860,486	54,271,700
h_4	66,291	130,487	1,066,142	2,200,720	4,112,097	13,350,069	52,273,127
h_5	62,768	123,553	1,009,487	2,030,234	3,893,578	12,640,642	49,495,314
h_6	58,283	114,724	937,347	1,814,052	3,615,335	11,737,315	45,958,274
h_7	52,867	104,063	850,242	1,554,392	3,279,371	10,646,597	41,687,493
h_8	46,559	91,647	748,799	1,253,920	2,888,108	9,376,347	36,713,742
h_9	39,405	77,566	633,750	915,717	2,444,365	7,935,718	31,072,856
h_{10}	31,457	61,921	505,923	543,256	1,951,338	6,335,088	24,805,477
h_{11}	22,772	44,825	366,239	140,357	1,412,580	4,585,990	17,956,764

h_{12}	13,412	26,401	215,705	2,134,112	831,972	2,701,027	10,576,061
h_{13}	3,445	6,781	55,406	1,683,011	213,699	693,780	50,314,090
h_{14}	63,806	125,597	1,026,186	1,214,641	3,957,988	12,849,750	41,669,876
h_{15}	52,844	104,019	849,882	733,806	3,277,986	10,642,098	32,725,430
h_{16}	41,501	81,691	667,455		2,574,365	8,357,770	23,545,197
h_{17}	29,859	58,775	480,219		1,852,197	6,013,224	14,195,319
h_{18}	18,002	35,435	289,522		1,116,683	3,625,352	
$W_2(15,n,\boldsymbol{h})$	4.3287×10^4	2.2001×10^4	2.6892×10^3	1.2633×10^3	6.9761×10^2	2.1762×10^2	5.4628×10
$W_2(16,n,\boldsymbol{h})$	1.8566×10^5	9.4342×10^4	1.1543×10^4		2.9932×10^3	9.2210×10^2	2.3503×10^2
$W_2(17,n,\boldsymbol{h})$	7.9637×10^5	4.0456×10^5	4.9511×10^4		1.2836×10^4	3.9555×10^3	1.0099×10^3
$W_2(18,n,\boldsymbol{h})$	3.4165×10^6	1.7356×10^6	2.1242×10^5		5.5072×10^4	1.6966×10^4	4.3332×10^3

参 考 文 献

华罗庚

[1] 数论导引，科学出版社，1956.

[2] 堆垒素数论，科学出版社，1957.

[3] 指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963.

[4] 从杨辉三角谈起，中国青年出版社，1956.

[5] 苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立理由，科学，**15** (2)，1930，307.

华罗庚与王 元

[1] Remarks concerning numerical integration, *Sci. Rec. New Ser.*, 4(1), 1960, 8—11.

[2] 积分的近似计算，科学出版社，1961.

[3] 数值积分及其应用，科学出版社，1963.

[4] On Diophantine approximations and numerical integrations, (I) *Sci. Sin.*, **13**(6), 1964, 1007—1008, (II) *Sci. Sin.*, **13**(6), 1964. 1009—1010.

[5] On numerical integration of periodic functions of several variables, *Sci. Sin.*, **14**(7), 1965, 964—978.

[6] 论一致分布与近似分析(数论方法)，(I) 科学通报，**3**, 1973, 112—114; (II) 科学通报，**4**, 1973, 165—166; (III) 科学通报，**12**, 1974, 559—560.

[7] On uniform distribution and numerical analysis (Number-theoretic method), (I) *Sci. Sin.*, **16**(4), 1973, 483—505, (II) *Sci. Sin.*, 17(3), 1974, 331—348, (III) *Sci. Sin.*, **18**(2), 1975, 184—198.

[8] A note on simultaneous Diophantine approximations to algebraic integers, *Sci. Sin.*, **20**(5), 1977, 563—567.

王 元

[1] A note on interpolation of a certain class of functions, *Sci. Sin.*, **10**(6), 1960, 632—636.

[2] 论积分的近似计算及其应用(数论方法的应用)，数学进展，**5** (1)，1962，1—44.

[3] Remarks on the interpolation of a certain class of functions, *Sci. Sin.*, **14**(4), 1965, 629—631.

[4] О интерполяции функций некоторого класса, *Kexue Tongbao*, **17** (9), 1966, 387—389.

王　元、朱尧辰与蒋运财

［1］ 关于近似分析中的数论方法的几点注记，中国科学技术大学学报，**1**(2)，1965，213—218.

张荣肖

［1］ 用数论网格计算重积分，中国科学技术大学建校五周年纪念科学论文集，1964，76—87.

徐广善

［1］ 抛物型方程柯西问题的近似解法，科学通报，**8**，1975，361—364.

谢庭藩与裴定一

［1］ 关于多项式的不可分解性，科学通报，**9**，1975，414—415.

Adams, C. R. and Clarkson, J. A.

[1] On definitions of bounded variation for function of two variables, *TAMS*, **35**, 1933, 824—854.

[2] Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *TAMS*, **36**, 1934, 711—730.

Baker, A.

[1] On some Diophantine inequalities involving the exponential function, *Can. J. Math.*, **17**(4), 1965, 616—626.

Bernstein, L.

[1] The Jacobi-Perron algorithm, its theory and applications, *Lec. Not. in Math.*, Spr.-Ver., **207**, 1971.

Cassels, J. W. S.

[1] An introduction to Diophantine approximation, *Camb. Univ. Pre.*, 1957.

Cranley, R. and Parterson, T. N. L.

[1] Randomization of number theoretic methods for multiple integration, *SIAM J. on Num. Anal.*, **6**, 1976, 904—914.

Davis, P. J. and Rabinowitz, P.

[1] Some Monte Carlo experiments in computing multiple integrals, *Math. Tables Aibs. Comput.*, **10**, 1956, 1—8.

Erdös, P. and Turan, P.

[1] On a problem in the theory of uniform distribution, *I*, *Indag. Math.*, **10**, 1948, 370—378.

Fricke, R.

[1] Lehrbuch der Algebra, Bd. **III**, 1928.

Haber, S.

[1] Numerical evaluation of multiple integrals, *SIAM Rev.*, **12**(4), 1970, 481—526.

[2] Experiments on optimal coefficients, See "Applications of number theory to numerical analysis, Edited by Zaremba, S. K., Acad. Pre, 1972, 11—38".

Haber, S. and Osgood, C. F.

[1] On the sum of $\sum \langle n\alpha \rangle^{-t}$ and numerical integration, *pac. J. Math.*, **31**, 1969, 383—394.

Halton, J. H.

[1] On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals, *Num. Math.*, **27**(2), 1960, 73—79.

Hammersley, J. M.

[1] Monte Carlo methods for solving multivariable problems, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **86**, 1960, 844—874.

Hardy, G. H.

[1] On double Fourier series and especially those which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters, *QJM, Oxford*, **37**, 1906, 53—79.

Haselgrove, C. B.

[1] A method for numerical integration, *Math. Comp.*, **15**, 1961, 323—337.

Hlawka, E.

[1] Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie Gleichverteilung, *Ann. di Math. Pure Appl.*, **4**, 1961, 325—334.

[2] Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod. 1; *Math. Zeit.*, **77**, 1961, 273—284.

[3] Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale, *Mon. Math.*, **66**(2), 1962, 140—151.

[4] Uniform distribution modulo 1 and numerical integration, *Comp. Math.*, **16**, 1964, 95—105.

[5] Trigonometrische Interpolation bei Funktionen von mehreren Variaben, *Acta Arith.*, **9**, 1964, 305—320.

Keast, P.

[1] Multi-dimensional quadrature formula, *Tech. Rep.*, **40**, Dep. of Comp. Sci., Univ. Toronto, 1972.

[2] Optimal parameters for multi-dimensional integrals, *SIAM J. on Num. Ana.*, **10**(5), 1973, 831—838.

Kedem, G. and Zaremba, S. K.

[1] A table of good lattice point in three dimensions, *Num. Math.*, **23**, 1974, 175—180.

Koksma, J. F.

[1] Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1. *Math.* (*Zutphen*), **11**, 1942—1943, 7—11.

[2] Some theorems on Diophantine inequalities, *Math. Cent. Amer. Scr.*, **5**, 1950, 1—51.

Krause, M.

[1] Über Fouriersche Reihen zwei veranderlichen grossen Sachsische,

Ges. der Wiss., *Leip.-Ber.*, *Über der Verh.*, **55**, 1903, 164—197.

Kuipers, L. and Niederreiter, H.

[1] Uniform distribution of sequences, *Wiley-Inter. Pub.*, 1974.

Mahler, K.

[1] On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of e, *Acta Arith.*, *XXVII*, 1975, 61—87.

Maisonneuve, D.

[1] Recherche et utilisation des "Bons treillis" programmation et résultats numériques, See "Application of number theory to numerical analysis, Edited by Zaremba, S. K., Acad. Pre., 1972, 121—202".

Minkowski, H.

[1] Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, *Acta Math.*, **26**, 1902, 333—351.

Moon, Y. S.

[1] Some numerical experiments on number-theoretic mothods in the approximation of multi-dimensional integrals, *Tech. Rep.*, **72**. Dep. Comp. Sci. Univ. Toronto., 1974.

Niederreiter, H.

[1] Methods for estimating discrepancy, See "Application of number theory to numerical analysis, Edited by Zaremba, S. K., Acad. Pre., 1972, 203—236".

[2] Application of Diophantine approximations to numerical integrations, See "Diophantine approximation and its applications, Edited by Osgood, C. F., Acad. Pre., 1973, 129—199".

[3] Pseudorandom numbers and optimal coefficients, *Adv. in Math.*, **2**, **26**, 1977, 99—181.

Peek, L. G.

[1] On uniform distribution of algebraic numbers, *PAMS*, **4**, 1953, 440—443.

Perron, O.

[1] Grundlagen fuer eine Theorie des Jacobische Kettenbruchalgorithmus, *Math. Ann.*, **64**, 1907, 1—76.

Pisot, C.

[1] La répartition modulo 1 et les nombres algebriques, *Ann. di Pisa.*, **2**(7), 1938, 205—248.

Ramachandra, K.

[1] On the units of cyclotomic fields, *Acta Arith.*, **12**, 1966, 165—173.

Raney, G. N.

[1] Generalization of Fibonacci sequence to n dimensions, *Can. J. Math.*, **18**(2), **1966**, 332—349.

Richtmyer, R. D.

[1] The evaluation of definite integrals and a quasi-Monte Carlo method based on the properties of algebraic numbers, *Rep. LA-1342, Los-Alamos Sci. Lab.*, Los Alamos, 1951.

eoth, K. F.

[1] On irregularities distribution, *Math.*, **2**(1), 1954, 73—79.

Schmidt, W. M.

[1] Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.*, **125**, 1970, 189—201.

[2] Lectures on Diophantine approximations, *Dep. Math. Univ. of Colorado,* Boulder, Colo., 1970.

[3] Irregularitites of distribution, *VII, Acta Arich.*, **21**, 1972, 45—50.

Stroud, A. H.

[1] Approximate calculation of multiple integrals, Prentice Hall Inc., 1971.

Van Aardenne-Ehrenfest, T.

[1] On the imposibility of a just distribution, *Indag. Math.*, **11**, 1949, 264—269.

Van der Corput, J. G.

[1] Verteilungs Funktionen, I, *Pro. Acad. Amsterdam.*, **38**, 1935, 813—821.

Vijayaraghavan, T.

[1] On the fractional parts of the powers of a number, II. *Proc. of the Camb. Phil. Soc.*, **37**, 1941, 349—357.

Weil, A.

[1] On some exponential sums, *PNAS, USA*, **34**, 1948, 204—207.

Weyl, H.

[1] Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.*, **77**, 1916, 313—352.

Zaremba, S. K.

[1] Good lattice points, discrepancy and numerical integration, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (iv) **73**, 1966, 293—318.

[2] La méthode des ''Bons trellis'' pour le cacul des integrals multiples, See ''Applications of number theory to numerical analysis, Edited by Zaremba, S. K., Acad. Pre., 1972, 39—120''.

[3] Good lattice points modulo composite numbers, *Mon. Math.*, **78**, 1974, 446—460.

[4] On cartesian products of good lattices, *Math. Comp.*, **135**, **1976**, 546—552.

Бахвалов, Н. С.

[1] О приближенном вычислении кратных интетралов, *Вес. МГУ*, **4**, 1959, 3—18.

[2] Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул. *Жур. Выч. и Мат. Физ.*, **1**(1), 1961, 64—77.

[3] Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными приозводными, *Вес. МГУ*, **3**, 1963, 7—16.

[4] Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций, доп. к *Жур. Выч. Мат. и мат. Физ.*, Изд. «Наука», Мос., 1964, 5—63.

Виноградов, И. М.

[1] Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Физмат. Лит. Изд., 1971.

Владимиров, В. С.

[1] Уравнения математической физике, Физмат. Лит. Изд., 1967.

Гельфанд, И. М., Фролов, А. С., и Ченцов. Н. Н.

[1] Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло, Изд. *Высш. Уч. Завед.*, Сер. Мат., 5, 1958, 32—45.

Коробов, Н. М.

[1] Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, *ДАН СССР*, **115**(6), 1957, 1062—1065.

[2] О приближенном вычислении кратных интегралов. *ДАН СССР*, **124**(6), 1959,1207—1210.

[3] О приближенном решении интегральных уравлений, *ДАН СССР*, **128**(2), 1959, 235—238.

[4] Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов. *Вес. МГУ*, 4. 1959, 19—25.

[5] Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов, *ДАН СССР*, **132**(5), 1960, 1009—1012.

[6] Применение теоретикочисловых сеток в интегральных уравлениях и интерполяционных формулах, Тру. Мат. Ин-та им. Стеклова, В. А., Т. **60**, 1961, 195—210.

[7] Теоретикочисловые методы в приближенном анализе, Физмат. Лит. изд., 1963.

[8] О некоторых вопросах теории диофантовых приближений, *УМН СССР*, **135**(3), 1967, 83—118.

Рябенький, В. С.

[1] О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса, *ДАН СССР*, **131**(5), 1960, 1025—1027.

[2] Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи коши методом конечных разностей, Тр. маг. ин-та им. Стеклова, В С., Т. **60**, 1961, 232—237.

Салтыков, А. И.

[1] Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, **3**(1), 1963, 181—186.

Смоляк, С. А.

[1] Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α *ДАН СССР,* **131**(5), 1960, 1028—1031.

Соболь, И. М.

[1] Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций классов $\tilde{W}_1$ и $\tilde{H}_1$ *Жур. Выч. мат. и мат. Физ.,* **1**(2), 1961, 208—216.

Солодов, В. М.

[1] О Вычислении кратных интегралов. *ДАН СССР,* **127**(4), 1959, 753—756.

[2] Интегрирование по некоторым областям отличным от единичного куба, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* **6**, 1968, 1334—1341.

Стоянцев, В. Т.

[1] Решение задачи коши для параболическога уравления методом квази Монте-Карло, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* **13**(5), 1973, 1153—1160.

Хинчин, А. Я.

[1] Цепные дробы, *УМН СССР,* **1**, 1936.

Шарыгин, И. Ф.

[1] О применении теоретикочисловых методов интегрирования в случае непериодических функций, *ДАН СССР,* **132**(1), 1960, 71—74.

[2] Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* **3**(2), 1963, 370—376.

Шахов, Ю. Н.

[1] О приближенном решений уравнений Вольтерра II рода методом итераций, *ДАН СССР*, **128**(6), 1959, 1136—1139.

[2] О вычи-слении собственных значений многомерного симметричного ядра с помощью теоретико-числовых сеток, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* **3**(6), 1963, 988—997.

[3] О приближенном решении много-мерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итерацив, доп. к *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* Изд. «Наука», Мос., 1964, 75—100.

[4] О вычислении интегралов растущей кратности, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* **5**(5), 1965, 911—916.